ECUACIONES CUADRÁTICAS

Elaboró Ing. Efrén Giraldo T.

Ecuaciones de segundo grado

PROFESOR EFRÉN GIRALDO

- (-5*-5)= 25
- 5*5= 25

- 25 tiene dos raíces -5   y +5
- Toda ecuación cuadrática tiene dos raíces.

Ecuaciones de segundo grado Caso 1
Ecuación de la forma x^2 =c,

Resolución de una ecuación cuadrática simple

- Las soluciones de la ecuación $x^2 = c$ son $x = \sqrt{c}$ y $x = -\sqrt{c}$.

Por tanto x = ±c

$x^2 = 3$, x= $\pm\sqrt{3}$

Encuentre la solución de cada ecuación.

a) $x^2 = 5$ b) $(x - 4)^2 = 5$

Solución

a) De acuerdo con el principio del recuadro anterior, obtenemos $x = \pm\sqrt{5}$.

b) Obtenemos también la raíz cuadrada de cada miembro de esta ecuación.

$$(x - 4)^2 = 5$$

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \qquad \textit{Obtención de la raíz cuadrada}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{5} \qquad \textit{Se suma 4}$$

Las soluciones son $x = 4 + \sqrt{5}$ y $x = 4 - \sqrt{5}$.

(Stewar.2007)

La ecuación sería: **$ax^2 + c = 0$.** Es mejor usar este método específico que la fórmula general.

$$ax^2 + c = 0 \rightarrow ax^2 = -c \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{-c}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Las raíces pueden ser reales o imaginarias.

(Algebra con papas, 2011)

La ecuación sería: $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$. No es necesario aplicar la fórmula general. Se saca factor común la x y se igualan a cero cada uno de los factores:

$x \cdot (ax + b) = 0$, luego soluciones $\mathbf{x_1 = 0}$ y $ax+b = 0$ y por tanto $ax = -b$ y así $\mathbf{x_2 = -b/a}$.

(Algebra con papas,2011)

Resolver: $2x^2 - 18 = 0$

Solución:

$$2x^2 - 18 = 0 \rightarrow 2x^2 = 18$$

$$\rightarrow x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

$$\rightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = +3 \\ x_2 = -3 \end{array}}$$

(Algebra con papas)

Caso 2. Ecuaciones cuadráticas a completar cuadrado perfecto cuando tienen la forma $x^2+bx+c=0$

1. Observamos que el coeficiente de x es b
2. Tomo ese coeficiente b y lo divido entre 2 o sea $\frac{b}{2}$.
3. Lo elevo al cuadrado o sea $(\frac{b}{2})^2$
4. Paso c al lado opuesto $x^2+bx=-c$
5. Sumo $(\frac{b}{2})^2$ al lado izquierdo $x^2+bx+(\frac{b}{2})^2$
6. Como sumé $(\frac{b}{2})^2$ al lado izquierdo , lo debo sumar también al lado derecho o sea $x^2+bx+(\frac{b}{2})^2=-c+(\frac{b}{2})^2$
7. El lado izquierdo quedó un cuadrado perfecto así: $(x+\frac{b}{2})^2=\underbrace{-c+(\frac{b}{2})^2}_{d}$
8. Se resuelve el término de la derecha y da un valor d
9. La ecuación queda así : $(x+\frac{b}{2})^2=d$
10. Por tanto de acuerdo al caso anterior queda así: $(x+\frac{b}{2})=\pm\sqrt{d}$

(Stewar.2007)

Resuelva la ecuación.

a) $x^2 - 8x + 13 = 0$ b) $3x^2 - 12x + 6 = 0$

(Stewar.2007)

$\sqrt{-1}$

- **X^2 - $8x + 13 = 0$** 13 no es cuadrado de ningún numero.
- De la misma manera que antes
- $X^2 - 8x = -13$
-
- $X^2 - 8x + (8/2)^2 = (8/2)^2 - 13$

$X^2 - 8x + (8/2)^2 = 16 - 13$

- $(x-4)^2 = 3$ sacando √ a ambos lados
- $X-4 = \pm\sqrt{3}$ $x = 4 \pm \sqrt{3}$ (Stewar.2007)

Caso 3. Resolución por Factorización cuando se pueda

Propiedad a utilizar $a * b = 0$ $a=0$ ó $b=0$

- **$(x-a_1)(x-a_2)=0$ implica que $(x-a_1)=0$ ó $(x-a_2)=0$**
- **$X= a_1$ ó $X =a_2$**

- **$X^2 + 5X = 24$**

- (

Resolver: $3x^2 - 5x = 0$

Solución:

$$3x^2 - 5x = 0 \rightarrow x \cdot (3x - 5) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 1)\ x = 0 \rightarrow \boxed{x_1 = 0} \\ 2)\ 3x - 5 = 0 \rightarrow 3x = 5 \rightarrow \\ \quad \rightarrow \boxed{x_2 = \dfrac{5}{3}} \end{cases}$$

(Algebra con papas)

Dos #s que sumados den..
y multiplicados den…

- **$X^2 + 5X - 24 = 0$**
- $X^2 + 5X – 24 = 0$
- $(X+8)(X-3)=0$
- $(X+8)= 0$ $X= -8$
- $(X-3)=0$ $X= 3$
-
- 3   y -8 son soluciones, raíces o ceros de la ecuación

Fórmula General

Ecuación de la forma $aX^2 + bx + c = 0$

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una fórmula es como una receta. En ella se dice cómo hacer algo en un orden determinado.

El porqué de la fórmula?

- Algunas ecuaciones de segundo grado no pueden resolverse utilizando los métodos que se han descrito anteriormente.

- Sin embargo   el método de la fórmula siempre funciona.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Una fórmula es como una receta. En ella se dice cómo hacer algo en un orden determinado.

Utilice la fórmula siempre que se requieran soluciones con uno o más decimales y cuando por factorización no se pueda encontrar los dos números que multiplicados y sumados den…..

http://media.educ.ar/skoool/algebra/resolucion_de_ecuaciones_de_segundo_grado/launch.html

Resolver: $x^2-2x-8=0$

Solución:

$$\boxed{1}\,x^2\boxed{-2}\,x\boxed{-8}=0$$

1º) Identificamos coeficientes

$$\boxed{a}\,x^2\boxed{+b}\,x\boxed{+c}=0$$

$a=+1$

$a=+1\ ;\ b=-2\ ;\ c=-8$

2º) Sustituimos en la fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot a\cdot c}}{2\cdot a}$$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2\cdot 1}$$

3º) Operamos:

$$x=\frac{+2\pm\sqrt{+4+32}}{2}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{2+6}{2}=+4 \\ x_2=\dfrac{2-6}{2}=-2\end{cases}$$

(Algebra con papas)

- $3x^2 - 5x - 1=0$
- $4x^2 + 12x + 9 = 0$

$\sqrt{-1} = i$ es un imaginario

$$\sqrt{-8} = \sqrt{8. -1} = \sqrt{8}\sqrt{-1} = 8i$$

$$\sqrt{-7} = \sqrt{7. -1} = \sqrt{7}\sqrt{-1} = 7i$$

- La raíz par de un número negativo siempre será un imaginario de la forma **ni**

Análisis de $\sqrt{b^2 - 4ac}$

- **D=** $b^2 - 4ac$ se llama el **discriminante** de la ecuación **$aX^2 + bx + c = 0$**

- **Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación tiene dos soluciones reales**
- Si $b^2 - 4ac$ **< 0 la ecuación tiene dos soluciones imaginarias**

- **Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación tiene una solución realh**

Si $\mathbf{b^2 - 4ac} = 0$, el número de soluciones de la ecuación de segundo grado es:

Si $\mathbf{b^2 - 4ac} > 0$, el número de soluciones de la ecuación de segundo grado es:

Si $\mathbf{b^2 - 4ac} < 0$, el número de soluciones de la ecuación de segundo grado es:

(Algebra con papas)

Elaboró Ing. Efrén Giraldo Toro 20

ALGUNAS ECUACIONES UN POCO DIFERENTES

- Ecuaciones con radicales

Resuelva la ecuación $2x = 1 - \sqrt{2 - x}$.

Solución Para eliminar la raíz cuadrada, primero la aislamos en un miembro, y luego elevamos al cuadrado.

$2x - 1 = -\sqrt{2 - x}$	Resta 1
$(2x - 1)^2 = 2 - x$	Elevamos al cuadrado ambos miembros
$4x^2 - 4x + 1 = 2 - x$	Desarrollo del primer miembro
$4x^2 - 3x - 1 = 0$	Suma de $-2 + x$
$(4x + 1)(x - 1) = 0$	Factorización
$4x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$	Propiedad del producto nulo
$x = -\frac{1}{4} \qquad x = 1$	Solución

(Stewar, 2007)

Los valores $x = -\frac{1}{4}$ y $x = 1$ son sólo soluciones potenciales. Es necesario comprobarlas para ver si cumplen con la ecuación original. De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = -\frac{1}{4}$ es una solución, pero $x = 1$ no lo es. La única solución es $x = -\frac{1}{4}$. ■

Cuando resolvemos una ecuación, podemos terminar con una o más **soluciones extrañas**, es decir, soluciones potenciales que no cumplen con la ecuación original. En el ejemplo 11, el valor $x = 1$ es una solución extraña. Dichas soluciones se pueden introducir cuando elevamos al cuadrado ambos miembros de una ecuación porque la operación de elevar al cuadrado puede transformar una ecuación falsa en una verdadera. Por ejemplo, $-1 \neq 1$, pero $(-1)^2 = 1^2$. Por consiguiente, la ecuación cuadrada podría ser verdadera para más valores de la variable que la ecuación original. Ésta es la razón por la que debe comprobar siempre sus respuestas para tener la seguridad de que todas cumplen con la ecuación original.

(Stewar, 2007)

Ecuación de 4 grado reductible a grado 2

Encuentre todas las soluciones de la ecuación $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$.

Solución Si hacemos que $W = x^2$, entonces obtenemos una ecuación en donde la nueva variable W es cuadrática:

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 8 = 0 \qquad \text{Se escribe } x^4 \text{ como } (x^2)^2$$

$$W^2 - 8W + 8 = 0 \qquad \text{Se hace } W = x^2$$

$$W = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad \text{Fórmula cuadrática}$$

$$x^2 = 4 \pm 2\sqrt{2} \qquad W = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{4 \pm 2\sqrt{2}} \qquad \text{Obtención de las raíces cuadradas}$$

Entonces, hay cuatro soluciones:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}, \qquad -\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

Con la ayuda de una calculadora obtenemos las aproximaciones $x \approx 2.61, 1.08, -2.61, -1.08$. ■

(Stewar, 2007)

Ecuaciones fraccionarias

Determine todas las soluciones de la ecuación $x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$.

Solución Esta ecuación es del tipo cuadrático porque si hacemos que $W = x^{1/6}$, entonces $W^2 = (x^{1/6})^2 = x^{1/3}$.

	$x^{1/3} + x^{1/6} - 2 = 0$	
	$W^2 + W - 2 = 0$	Se hace $W = x^{1/6}$
	$(W - 1)(W + 2) = 0$	Factorización
$W - 1 = 0$ o bien	$W + 2 = 0$	Propiedad del producto nulo
$W = 1$	$W = -2$	Solución
$x^{1/6} = 1$	$x^{1/6} = -2$	$W = x^{1/6}$
$x = 1^6 = 1$	$x = (-2)^6 = 64$	Obtención de la sexta potencia

De acuerdo con *Compruebe su respuesta* vemos que $x = 1$ es una solución, pero $x = 64$ no lo es. La única solución es $x = 1$. ■

(Stewar, 2007)

Compruebe su respuesta

$x = 1$:

$$PM = 1^{1/3} + 1^{1/6} - 2 = 0$$

$$SM = 0$$

$$PM = SM \quad ✓$$

$x = 64$:

$$PM = 64^{1/3} + 64^{1/6} - 2$$
$$= 4 + 2 - 2 = 4$$

$$SM = 0$$

$$PM \neq SM \quad ✗$$

(Stewar, 2007)

Ecuaciones con valor absoluto

- Se parte de la siguiente propiedad del valor absoluto:

$|a|=b.$

Como b es + (no puedeser negativo por la definición de valor absoluto) y por la misma definiciòn de valor absoluto se tiene que:

$a = b$

ó

$a = -b$

Una ecuación con valor absoluto

Resuelva la ecuación $|2x - 5| = 3$.

Solución De acuerdo con la definición de valor absoluto, $|2x - 5| = 3$ equivale a

$$\begin{aligned} 2x - 5 &= 3 \qquad \text{o bien} \qquad & 2x - 5 &= -3 \\ 2x &= 8 & 2x &= 2 \\ x &= 4 & x &= 1 \end{aligned}$$

Las soluciones son $x = 1$, $x = 4$.

(Stewar, 2007)

Bibliografía

- Algebra con papas. SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES. José Antonio Ortega
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesdiegogaitan/departamentos/departamentos/departamento_de_matemat/recursos/algebraconpapas/recurso/tests/segundogrado/clasificacion/clasificacionteoria.htm

- Politécnico Grancolombiano. (2011). Ecuaciones de primer grado. Tomado el 20 de agosto de 2011 de:

  http://www.authorstream.com/Presentation/migv-125432-ecuaciones-de-primer-grado-ec1grado-entertainment-ppt-powerpoint

- Educarchile. (2011). Problemas con ecuaciones de primer grado. Tomado 23 agosto de 2011 de:
- http://www.educarchile.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=179845

- Tomado el 29 de III 2011 de : http://media.educ.ar/skoool/algebra/resolucion_de_ecuaciones_de_segundo_grado/launch.html

- Stewar et all. (2007. Precalculo.