Cálculo

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill • Warren S. Wright

Mc Graw Hill

CÁLCULO

Trascendentes tempranas

CÁLCULO

Trascendentes tempranas

Cuarta edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

Revisión técnica:

Marlene Aguilar Ábalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Ciudad de México

Crisanto Castillo Castillo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Cuernavaca, México

Fidel Castro López
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional, México

Rocío Cerecero López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Cuernavaca, México

Ramón Espinosa Armenta
Instituto Tecnológico
Autónomo de México (ITAM)

Eugenio L. Fautsch Tapia
Facultad de Química,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana,
Ciudad de México

Enrique Arturo Galván Flores
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional, México

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca,
Toluca, México

Linda Margarita Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Ciudad de México

Santiago Neira Rosales
Facultad de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica,
Universidad Autónoma de Nuevo León, México

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz
Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería,
Huancayo, Perú

John Alexander Pérez Sepúlveda
Universidad Nacional de Colombia,
Medellín, Colombia

Jorge Augusto Pérez Alcázar
Universidad Escuela de Administración de Negocios,
Universidad Sergio Arboleda y Escuela Colombiana de Ingeniería,
Bogotá, Colombia

Ignacio Ramírez Vargas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Hidalgo, México

Héctor Joé Rosas Toledo
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Ramiro Saldaña Acosta
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Laguna, México

Tonatihu Valdez Hernández
Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

Petr Zhevandrov
Facultad de Ingeniería, Universidad de la Sabana,
Bogotá, Colombia

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Hugo Villagómez Velázquez y Gabriel Nagore Cázares

CÁLCULO. TRASCENDENTES TEMPRANAS
Cuarta edición

Educación

DERECHOS RESERVADOS © 2011 respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
*A Subsidiary of **The McGraw-Hill** Companies, Inc.*
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón,
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

ISBN 13: 978-607-15-0502-6

Translated from the 4th edition of: *Calculus*. *Early transcendentals* by Dennis G. Zill and Warren S. Wright.

978-0-7637-5995-7

1234567890 1098765432101

Impreso en China *Printed in China*

The McGraw-Hill Companies

Prefacio

Para el instructor

Filosofía

La cuarta edición de *Cálculo*: *trascendentes tempranas* constituye una revisión sustancial de la última edición. Aunque en esta edición hay mucho material nuevo, he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un libro que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta edición

Secciones y ejercicios La mayor parte del material se ha actualizado y, en algunos casos, reorganizado. Muchas secciones y conjuntos de ejercicios se han reescrito por completo; asimismo, se les han agregado muchos problemas nuevos, en especial aplicaciones, problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones agregadas pertenecen al ámbito de la "vida real" en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han agregado problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. En esta edición hay más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Piense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

El capítulo 1 es un repaso de funciones, y siguiendo la moda prevaleciente actual, las funciones se presentan desde los puntos de vista algebraico, gráfico, numérico o verbal. De hecho, la última sección del capítulo 1 se titula *De las palabras a las funciones*. Debido a que muchos estudiantes invariablemente encontrarán dificultades para resolver problemas relacionados con tasas y optimización aplicada, he incluido esta sección a fin de proporcionar una visión previa sobre cómo establecer, o construir, una función a partir de una descripción verbal (donde se ha eliminado el contexto del cálculo). En efecto, muchos problemas en la sección 1.7 vuelven a aparecer en un contexto de cálculo en la sección 4.8.

En este texto las ecuaciones diferenciales aparecen en dos capítulos: 8 y 16. Las ecuaciones de primer orden se consideran en el capítulo 8 para beneficio de aquellos estudiantes que encuentren sus aplicaciones en cursos de física e ingeniería. En el capítulo 16 se consideran la solución y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior. Por supuesto, los capítulos 8 y 16 pueden combinarse y cubrirse como una unidad en cualquier punto del curso, una vez que se haya concluido el capítulo 4. En el apéndice se proporcionan demostraciones de algunos de los teoremas más largos. Al final de las secciones correspondientes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada capítulo empieza con su propia tabla de contenido y una introducción al material referido en ese capítulo. En la parte final del libro, después del apéndice, el lector encontrará la sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Autoevaluación,* que fue introducida en la última edición, consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Los usuarios de las tres ediciones previas han sido muy receptivos a las *Observaciones* con las que a menudo termina una sección. En consecuencia, el número de éstas ha aumentado y se les ha denominado *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean análisis informales dirigidos directamente al estudiante. Estos análisis varían desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

También, a solicitud de los usuarios, se ha incrementado el número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, he cambiado a un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de “figura 1.2.3” es

Capítulo Sección del capítulo 1
↓ ↓
1.2.3 ← Tercera figura de la sección 1.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en un capítulo posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 7.5 se proporciona como FIGURA 7.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 7.5.1. También, en esta edición cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano,* con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En la página xvii encontrará la sección "Autoevaluación", que contiene 56 preguntas. Esta "prueba" es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en la página RES-1. Sin tomar en cuenta su "calificación", lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer "que se le pegue") mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta edición y las ediciones previas, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, *Baylor University*
Salvatore Anastasio, *SUNY*, *New Paltz*
Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Robert Brooks, *University of Utah*
Dietrich Burbulla, *University of Toronto*
David Burton, *Chabot College*
Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
Arthur Dull, *Diablo Valley College*
Hugh Easler, *College of William and Mary*
Jane Edgar, *Brevard Community College*
Joseph Egar, *Cleveland State University*
Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
Peter Frisk, *Rock Valley College*
Shirley Goldman, *University of California at Davis*
Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
Jean Holton, *Tidewater Community College*

Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut Slate University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*
Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*
Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University*, *Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Loyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

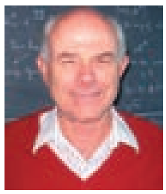
- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto del problema 37 de los ejercicios 8.3.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.

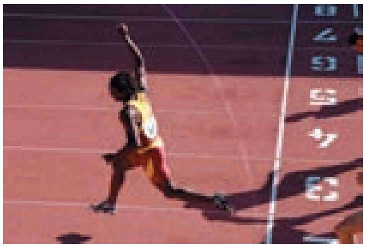
Dennis G. Zill



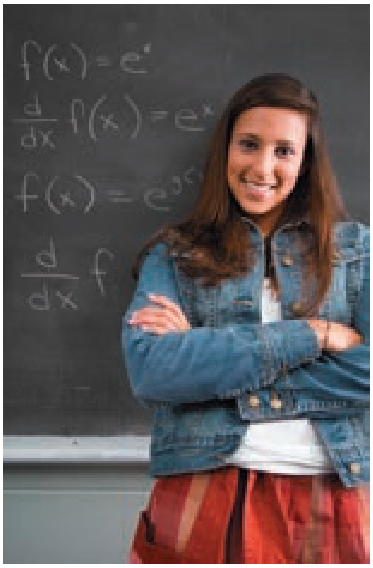
Warren S. Wright

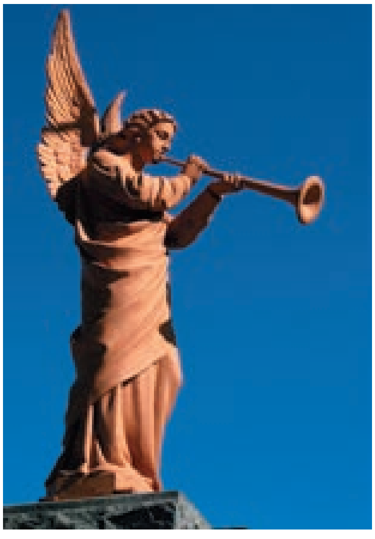
Contenido

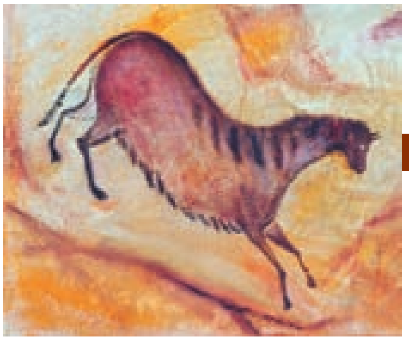
1 Funciones 1

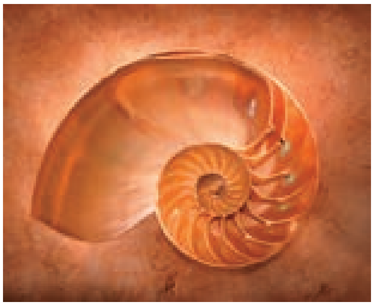


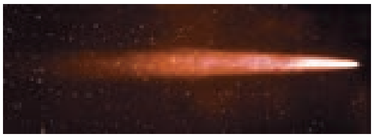
2 Límite de una función 67

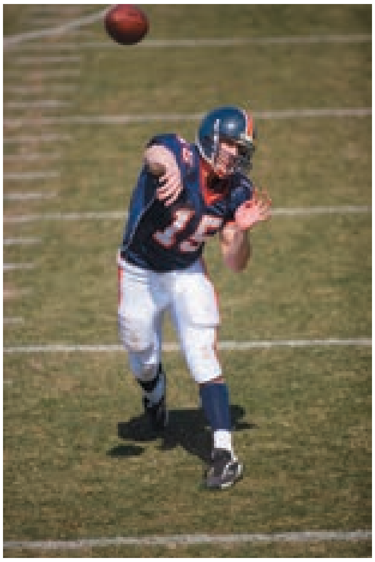












14 Integrales múltiples 749

15 Cálculo integral vectorial 801

16 Ecuaciones diferenciales de orden superior 867

Autoevaluación

Las respuestas a todas las preguntas están en la página RES-1.

Como preparación para el cálculo

Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. __________

2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. __________

3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$. __________

4. (Falso/verdadero) $\dfrac{2^n}{4^n} = \dfrac{1}{2^n}$. __________

5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es __________.

6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.

7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}2x + 2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.

9. Resuelva las ecuaciones:

a) $x^2 = 7x$ ***b)*** $x^2 + 2x = 5$ ***c)*** $\dfrac{1}{2x-1} - \dfrac{1}{x} = 0$ ***d)*** $x + \sqrt{x-1} = 1$

10. Factorice completamente:

a) $10x^2 - 13x - 3$
b) $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
c) $x^3 - 27$
d) $x^4 - 16$

Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. __________

12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. __________

13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\dfrac{-a}{a} < 0$. __________

14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ __________ o $x =$ _______.

15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ __________.

16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?

a) 0.25 ***b)*** 8.131313 … ***c)*** π
d) $\dfrac{22}{7}$ ***e)*** $\sqrt{16}$ ***f)*** $\sqrt{2}$
g) 0 ***h)*** -9 ***i)*** $1\frac{1}{2}$
j) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ***k)*** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***l)*** $\dfrac{-2}{11}$

17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.

i) $(2, 4]$ *ii)* $[2, 4)$ *iii)* $(2, 4)$ *iv)* $[2, 4]$
a) $|x - 3| < 1$ ***b)*** $|x - 3| \leq 1$ ***c)*** $0 \leq x - 2 < 2$ ***d)*** $1 < x - 1 \leq 3$

18. Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como

a) una desigualdad y ***b)*** una desigualdad que implique valores absolutos.

19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.

21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \dfrac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el __________ cuadrante.

24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es __________.

25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$__________ y $y_2 =$ __________.

26. (Llene los espacios en blanco) El punto $(1, 5)$ está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:
a) simétrica con respecto al eje x. __________
b) simétrica con respecto al eje y. __________
c) simétrica con respecto al origen. __________

27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, __________ y __________.

28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y?

29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a $(1, 3)$ es $\sqrt{26}$.

30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.

31. Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

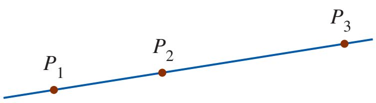


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

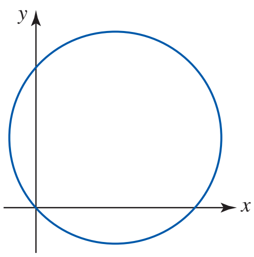


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a, b, c, d y e representan constantes diferentes de cero.
a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$
b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$
c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$
d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$
e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

Rectas

33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. __________

34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ __________.

35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente __________.

36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, __________, __________, y __________.

37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es __________.

38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 4)$ y $(6, 1)$.

40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

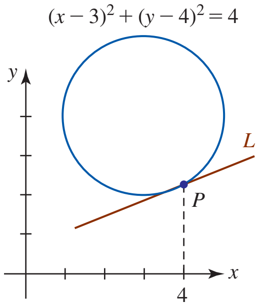


FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

i) $x + y - 1 = 0$	*ii)* $x + y = 0$	*iii)* $x - 1 = 0$
iv) $y - 1 = 0$	*v)* $10x + y - 10 = 0$	*vi)* $-10x + y + 10 = 0$
vii) $x + 10y - 10 = 0$	*viii)* $-x + 10y - 10 = 0$	

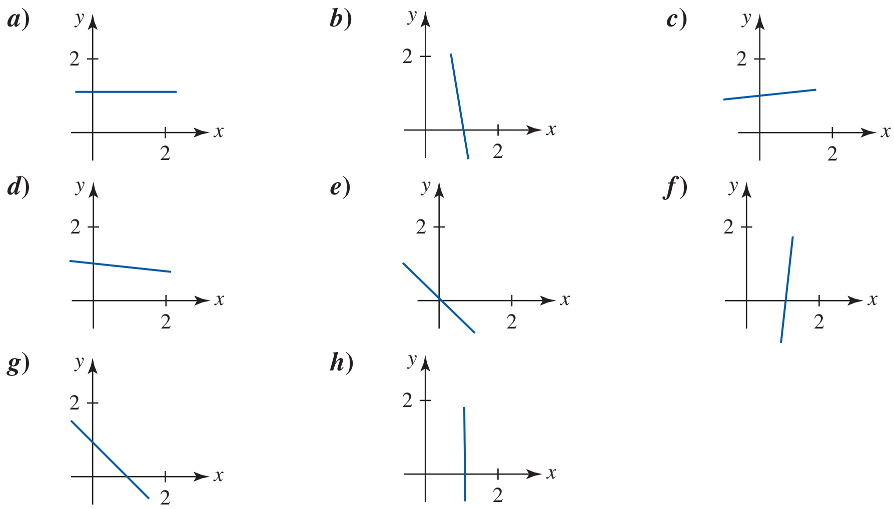


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. ___________

44. (Falso/verdadero) $\operatorname{sen}(2t) = 2 \operatorname{sen} t$. ___________

45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a ___________ radianes.

46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a ___________ grados.

47. (Llene el espacio en blanco) Si $\tan t = 0.23$, $\tan(t + \pi) =$ ___________.

48. Encuentre $\cos t$ si $\operatorname{sen} t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.

49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

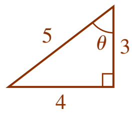


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

50. Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ.

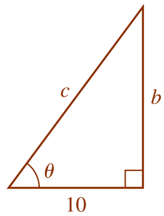


FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

Logaritmos

51. Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.

52. Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.

53. Exprese $\log_b 5 + 3\log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.

54. Use una calculadora para evaluar $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.

55. (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} =$ __________.

56. (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$. __________

Ensayo

La historia del cálculo

Por Roger Cooke
University of Vermont

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.

Isaac Newton

Gottfried Leibniz

¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1}. Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo, estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco “infinitesimal”

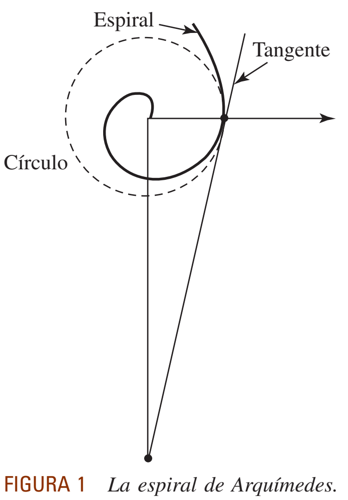


FIGURA 1 *La espiral de Arquímedes.* La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva "infinitamente próximos" entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza "infinitamente corta" de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases "infinitamente próximos" e "infinitamente cortos".

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos "infinitamente próximos", al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1, de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x. Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)$, de modo que $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (y_1, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x. La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangen*te [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] *es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invirtiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}r^3 + \cdots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta "rectificación" de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de "diferencia en x", y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x. En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número "infinitesimal", diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos "infinitamente delgados" de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx. Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x)\,dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x)\,dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x)\,dx, \qquad dA = f(x)\,dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5\cos^5\theta} - \cdots\right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45°. Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para arctan x.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura h en un círculo de diámetro d; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\dfrac{d}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{h}{d}\right)^2$.

Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L´Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito,* de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una “suma de diferencias infinitesimales” o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al “sumar” sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideano. En su *Principia Mathematica* escribió:

> Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

> . . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como "fantasmas de cantidades". Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque "epsilon-delta" de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado "análisis no estándar", no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v, el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t. Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v, ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? *Res.* $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\,\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:

- ***a***) Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B.
- ***b***) Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB, permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C.
- ***c***) Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C.
- ***d***) En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.
- ***e***) Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.
- ***f***) Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

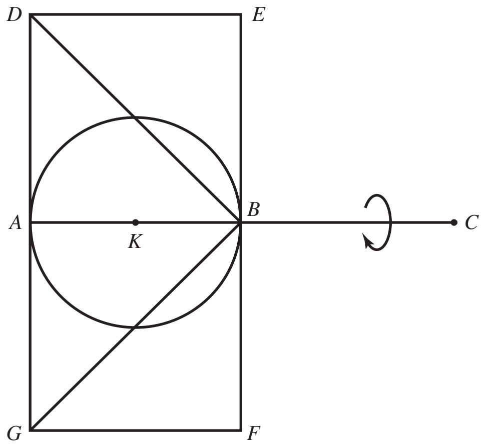


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

***a*)** Si el radio de la esfera es r, el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.

***b*)** Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

***c*)** La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.

***d*)** En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.

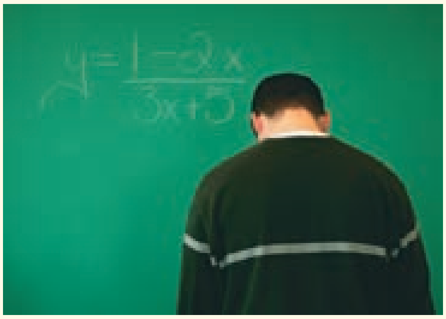
***e*)** Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.

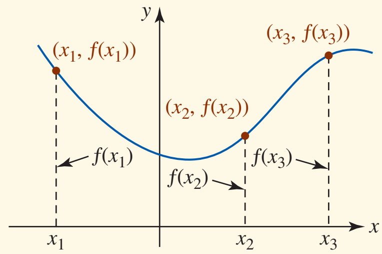
***f*)** En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4. Proporcione un razonamiento "infinitesimal" de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides "infinitamente delgadas" donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [*Sugerencia*: parta del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Capítulo 1

Funciones





En este capítulo ¿Ha escuchado frases como “el éxito está un función del trabajo arduo” y “la demanda está un función del precio”? La palabra *función* se usa a menudo para sugerir una relación o una dependencia de una cantidad con respecto a otra. Como tal vez sepa, en matemáticas el concepto de una función posee una interpretación similar pero ligeramente más especializada.

El cálculo trata, en esencia, sobre funciones. Así, resulta conveniente empezar su estudio con un capítulo dedicado a un repaso de este importante concepto.

1.1 Funciones y gráficas

Introducción Al usar los objetos e interactuar con las personas que nos rodean, resulta fácil establecer una regla de correspondencia que asocie, o apareje, a los miembros o elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Por ejemplo, para cada número de seguridad social hay una persona; para cada libro corresponde por lo menos un autor; para cada estado hay un gobernador, etcétera. En matemáticas estamos interesados en un tipo especial de correspondencia: una *correspondencia con valor único* denominada **función**.

Definición 1.1.1 Función

Una **función** de un conjunto X en un conjunto Y es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en X exactamente un elemento y en Y.

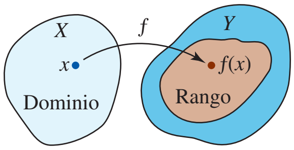


FIGURA 1.1.1 Dominio y rango de una función f

Terminología Una función suele denotarse por una letra como f, g o h. Entonces podemos representar una función f de un conjunto X en un conjunto Y por medio de la notación $f: X \to Y$. El conjunto X se llama **dominio** de f. El conjunto de elementos correspondientes y en el conjunto Y se denomina **rango** de la función. El único elemento y en el rango que corresponde a un elemento x selecto en el dominio X se denomina **valor** de la función en x, o **imagen** de x, y se escribe $f(x)$. Esta expresión se lee "f de x" o "f en x", y se escribe $y = f(x)$. Algunas veces también conviene denotar una función por $y = y(x)$. Observe en la FIGURA 1.1.1 que el rango de f no necesariamente debe ser todo el conjunto Y. A muchos profesores les agrada llamar a un elemento x en el dominio *entrada* de la función, y al elemento correspondiente $f(x)$ en el rango *salida* de la función. Puesto que el valor de y depende de la elección de x, y se denomina **variable dependiente**; x se denomina **variable independiente**. A partir de este momento consideraremos que los conjuntos X y Y constan de números reales; así, la función f se denomina **función con valor real de una sola variable real**.

En todos los análisis y ejercicios de este texto, las funciones se representan de varias formas:

- *analítica*, es decir, por medio de una fórmula como $f(x) = x^2$;
- *verbal*, es decir, mediante una descripción con palabras;
- *numérica*, es decir, mediante una tabla de valores numéricos; y
- *visual*, es decir, con una gráfica.

EJEMPLO 1 Función elevar al cuadrado

La regla para elevar al cuadrado un número real está dada por la ecuación $f(x) = x^2$ o $y = x^2$. Los valores de f en $x = -5$ y $x = \sqrt{7}$ se obtienen al sustituir x, a la vez, por los números -5 y $\sqrt{7}$.

$$f(-5) = (-5)^2 = 25 \quad \text{y} \quad f(\sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 = 7. \qquad \blacksquare$$

Correspondencia estudiante/escritorio

EJEMPLO 2 Correspondencia estudiante y escritorio

Una correspondencia natural ocurre entre un conjunto de 20 estudiantes y un conjunto de, por ejemplo, 25 escritorios en un salón de clases cuando cada estudiante escoge y se sienta en un escritorio diferente. Si el conjunto de 20 estudiantes es el conjunto X y el conjunto de 25 escritorios es el conjunto Y, entonces esta correspondencia es una función del conjunto X al conjunto Y, en el supuesto de que ningún estudiante se sienta en dos escritorios al mismo tiempo. El conjunto de 20 escritorios ocupados realmente por los estudiantes constituye el rango de la función. ■

Algunas veces, para destacar el argumento, escribiremos una función representada por una fórmula usando paréntesis en lugar del símbolo x. Por ejemplo, al escribir la función elevar al cuadrado $f(x) = x^2$ como

$$f(\quad) = (\quad)^2. \tag{1}$$

Entonces, para evaluar (1) en, por ejemplo, $3 + h$, donde h representa un número real, escribimos $3 + h$ entre paréntesis y realizamos las operaciones algebraicas correspondientes:

Consulte la sección *Páginas de recursos*, al final del libro, para tener un repaso del desarrollo del binomio.

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2.$$

Si una función f está definida por medio de una fórmula o ecuación, entonces por lo regular el dominio de $y = f(x)$ no se plantea explícitamente. Por lo general es posible deducir el dominio de $y = f(x)$ ya sea a partir de la estructura de la ecuación o del contexto del problema.

EJEMPLO 3 Dominio y rango

En el ejemplo 1, puesto que cualquier número real x puede elevarse al cuadrado y el resultado x^2 es otro número real, $f(x) = x^2$ es una función de R en R; es decir, $f: R \to R$. En otras palabras, el dominio de f es el conjunto R de números reales. Al usar notación de intervalos, el dominio también puede escribirse como $(-\infty, \infty)$. Debido a que $x^2 \geq 0$ para todo número real x, es fácil ver que el rango de f es el conjunto de números reales no negativos o $[0, \infty)$. ■

Dominio de una función Como ya se mencionó, el dominio de una función $y = f(x)$ que está definido por una fórmula no suele especificarse. A menos que se indique o implique lo contrario, se entiende que

- El **dominio** de una función f es el mayor subconjunto del conjunto de números reales para los que $f(x)$ es un número real.

Este conjunto a veces se refiere como **dominio implícito** o **dominio natural** de la función. Por ejemplo, no es posible calcular $f(0)$ para la **función recíproca** $f(x) = 1/x$ puesto que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Puesto que todo número real diferente de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto cero. Por el mismo razonamiento, la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ ni en $x = 2$, de modo que su dominio es el conjunto de números reales sin los números -2 y 2. La **función raíz cuadrada** $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definida en el sistema de números reales, debe pedirse que el **radicando**, en este caso simplemente x, sea no negativo. A partir de la desigualdad $x \geq 0$ observamos que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$. El dominio de la **función constante** $f(x) = -1$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es el conjunto que consta sólo del número -1.

EJEMPLO 4 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$.

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, de modo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Luego, como el símbolo $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x - 3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y en consecuencia $4 + \sqrt{x - 3} \geq 4$. El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x = 3$ y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x - 3}$ aumentan cuando x crece, se concluye que $y \geq 4$. Por consiguiente, el rango de f es $[4, \infty)$. ■

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{5x}{x^2 - 3x - 4}$.

Solución

a) Como en el ejemplo 4, la expresión dentro del radical —el radicando— debe ser no negativa; es decir, el dominio de f es el conjunto de números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ es también el dominio de f.

En precálculo se suelen resolver desigualdades cuadráticas como $(x - 3)(x + 5) \geq 0$ utilizando una tabla de signos.

b) Una función que está dada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores x para los cuales el denominador es igual a 0. Puesto que el denominador de $g(x)$ se factoriza como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, vemos que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. Éstos son los *únicos* números para los cuales g no está definida. Por tanto, el dominio de la función g es el conjunto de números reales, a excepción de $x = -1$ y $x = 4$. ■

Al usar notación de intervalos, el dominio de g en el inciso *b*) del ejemplo 5 puede escribirse como $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$. Como alternativa para esta desgarbada unión de intervalos ajenos, este dominio también puede escribirse usando notación de construcción de conjuntos $\{x \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

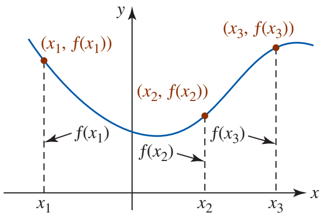


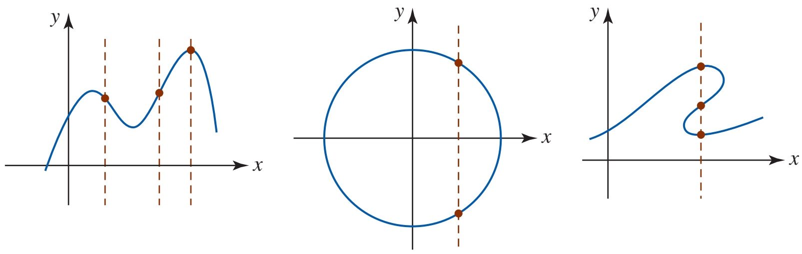
FIGURA 1.1.2 Puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$

Gráficas En campos como ciencia, ingeniería y negocios, a menudo se usa una función para describir los fenómenos. A fin de interpretar y utilizar datos, es útil representar estos datos en forma de gráfica. En el **sistema de coordenadas cartesianas** o **rectangulares**, la gráfica de una función f es la gráfica del conjunto de pares ordenados $(x, f(x))$, donde x está en el dominio de f. En el plano xy, un par ordenado $(x, f(x))$ es un punto, de modo que la gráfica de una función es un conjunto de puntos. Si una función se define por medio de una ecuación $y = f(x)$, entonces la gráfica de f es la gráfica de la ecuación. Para obtener los puntos sobre la gráfica de una ecuación $y = f(x)$, escogemos prudentemente números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en su dominio, calculamos $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \ldots$, trazamos los puntos correspondientes $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3)), \ldots$, y luego unimos estos puntos con una curva suave (en caso de ser posible). Vea la FIGURA 1.1.2. No olvide que

- un valor de x es una distancia dirigida desde el eje y, y
- un valor funcional $f(x)$ es una distancia dirigida desde el eje x.

A continuación se hacen algunos comentarios sobre las figuras en este texto. Con pocas excepciones, suele ser imposible representar la gráfica completa de una función, por lo que a menudo sólo se muestran las características más importantes de la gráfica. En la FIGURA 1.1.3*a*) observe que la gráfica se dirige hacia abajo en sus lados izquierdo y derecho. A menos que se indique lo contrario, puede asumirse que no hay sorpresas mayores más allá de lo que se ha mostrado y que la gráfica continúa simplemente de la manera indicada. La gráfica en la figura 1.1.3*a*) indica el denominado **comportamiento extremo** o **comportamiento global** de la función. Si una gráfica termina ya sea en su extremo derecho o izquierdo, este hecho se indica por medio de un punto cuando es necesario. Para representar el hecho de que el punto extremo está incluido en la gráfica se usa un punto sólido, y para indicar que el punto extremo no está incluido en la gráfica se usa un punto vacío.

Prueba de la recta vertical A partir de la definición de una función se sabe que para toda x en el dominio de f corresponde un solo valor $f(x)$ en el rango. Esto significa que una recta vertical que corta la gráfica de una función $y = f(x)$ (esto equivale a escoger una x) puede cortar a la gráfica de una función en cuanto mucho un punto. A la inversa, si *toda* recta vertical que corte la gráfica de una ecuación lo hace en cuanto mucho un punto, entonces la gráfica es la gráfica de una función. La última declaración se denomina **prueba de la recta vertical** para una función. Por otra parte, si *alguna* recta vertical corta la gráfica de una ecuación más de una vez, entonces la gráfica no es la gráfica de una función. Vea las figuras 1.1.3*a*)-*c*). Cuando una recta vertical corta una gráfica en varios puntos, el mismo número x corresponde a diferentes valores de y, en contradicción con la definición de función.



a) Función *b*) No es una función *c*) No es una función

FIGURA 1.1.3 Prueba de la recta vertical

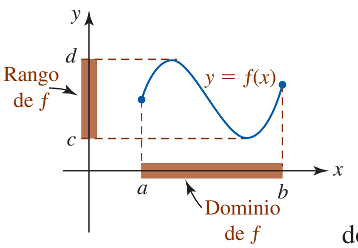


FIGURA 1.1.4 Dominio y rango interpretados gráficamente

Si se cuenta con una gráfica exacta de una función $y = f(x)$, a menudo es posible *ver* el dominio y el rango de f. En la FIGURA 1.1.4 suponga que la curva azul es la gráfica entera, o completa, de alguna función f. Así, el dominio de f es el intervalo $[a, b]$ sobre el eje x, y el rango es el intervalo $[c, d]$ sobre el eje y.

EJEMPLO 6 Otra perspectiva del ejemplo 4

A partir de la gráfica de $f(x) = 4 + \sqrt{x - 3}$ dada en la FIGURA 1.1.5, podemos ver que el dominio y el rango de f son, respectivamente, $[3, \infty)$ y $[4, \infty)$. Esto concuerda con los resultados del ejemplo 4. ■

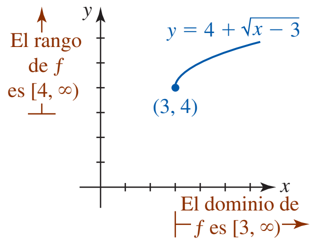
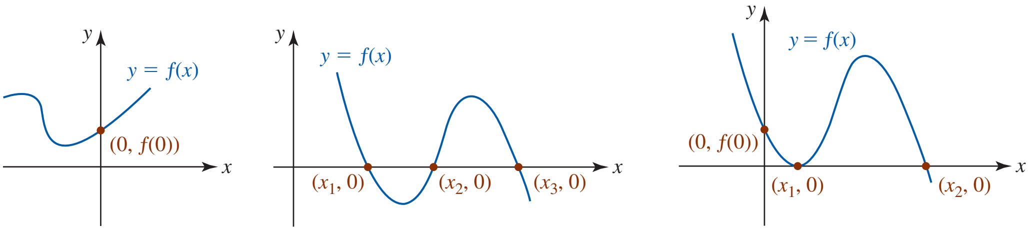


FIGURA 1.1.5 Gráfica de la función f en el ejemplo 6

Intersecciones Para graficar una función definida por una ecuación $y = f(x)$, una buena idea suele ser determinar primero si la gráfica de f tiene intersecciones. Recuerde que todos los puntos sobre el eje y son de la forma $(0, y)$. Entonces, si 0 es el dominio de una función f, la **intersección *y*** es el punto sobre el eje y cuya coordenada y es $f(0)$; en otras palabras, $(0, f(0))$. Vea la FIGURA 1.1.6*a*). De manera semejante, todos los puntos sobre el eje x tienen la forma $(x, 0)$. Esto significa que para encontrar las **intersecciones *x*** de la gráfica de $y = f(x)$, se determinan los valores de x que hacen $y = 0$. Es decir, es necesario resolver la ecuación $f(x) = 0$ para x. Un número c para el que $f(c) = 0$ se denomina **cero** de la función f o **raíz** (o **solución**) de la ecuación $f(x) = 0$. Los ceros *reales* de una función f son las coordenadas x de las intersecciones x de la gráfica de f. En la figura 1.1.6*b*) se ha ilustrado una función que tiene tres ceros x_1, x_2 y x_3 porque $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$ y $f(x_3) = 0$. Las tres intersecciones x correspondientes son los puntos $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$ y $(x_3, 0)$. Por supuesto, la gráfica de la función puede no tener intersecciones. Este hecho se ilustra en la figura 1.1.5.



a) Intersección y *b*) Tres intersecciones x *c*) Una intersección y, dos intersecciones x

FIGURA 1.1.6 Intersecciones de la gráfica de una función f

Una gráfica no necesariamente tiene que *cruzar* un eje de coordenadas en una intersección; una gráfica puede simplemente tocar, o ser *tangente*, a un eje. En la figura 1.1.6*c*), la gráfica de $y = f(x)$ es tangente al eje x en $(x_1, 0)$.

EJEMPLO 7 Intersecciones

Encuentre, de ser posible, las intersecciones x y y de la función dada.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 2$ ***b***) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x}$

Solución

a) Puesto que 0 está en el dominio de f, $f(0) = -2$ y así la intersección y es el punto $(0, -2)$. Para obtener las intersecciones x, es necesario determinar si f tiene ceros reales, es decir, soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$. Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación $x^2 + 2x - 2 = 0$ no tiene factores evidentes, se usa la fórmula general para polinomios cuadráticos para obtener $x = -1 \pm \sqrt{3}$. Las intersecciones x son los puntos $(-1 - \sqrt{3}, 0)$ y $(-1 + \sqrt{3}, 0)$.

b) Debido a que 0 no está en el dominio de f, la gráfica de f no posee intersección y. Ahora, puesto que f es una expresión fraccionaria, la única forma en que es posible que $f(x) = 0$ es que el numerador sea igual a cero y el denominador sea diferente de cero al evaluar la función en el mismo número. Al factorizar el miembro izquierdo de $x^2 - 2x - 3 = 0$ se obtiene $(x + 1)(x - 3) = 0$. En consecuencia, los ceros de f son los números -1 y 3. Las intersecciones x son los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. ■

Funciones definidas por partes Una función f puede implicar dos o más expresiones o fórmulas, cada una definida en partes distintas sobre el dominio de f. Una función definida de esta manera se denomina **función definida por partes**. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

no son dos funciones, sino una sola función donde la regla de correspondencia está dada en dos partes. En este caso, una parte se usa para los números reales negativos ($x < 0$) y la otra parte para los números reales no negativos ($x \geq 0$); el dominio de f es la unión de los intervalos $(-\infty, 0) \cup [0, \infty) = (-\infty, \infty)$. Por ejemplo, puesto que $-4 < 0$, la regla indica que se eleve al cuadrado el número: $f(-4) = (-4)^2 = 16$; por otra parte, puesto que $6 \geq 0$ se suma 1 al número: $f(6) = 6 + 1 = 7$.

EJEMPLO 8 Gráfica de una función definida por partes

Considere la función definida por partes

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x + 1, & x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

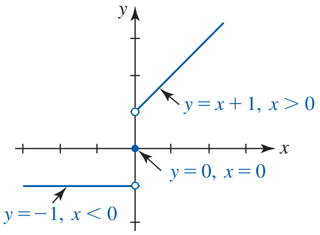


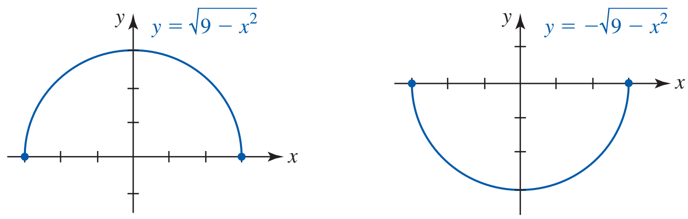
FIGURA 1.1.7 Gráfica de una función definida por partes en el ejemplo 8

Aunque el dominio de f consta de todos los números reales $(-\infty, \infty)$, cada parte de la función está definida sobre una parte diferente de su dominio. Se grafican

- la recta horizontal $y = -1$ para $x < 0$,
- el punto $(0, 0)$ para $x = 0$ y
- la recta $y = x + 1$ para $x > 0$.

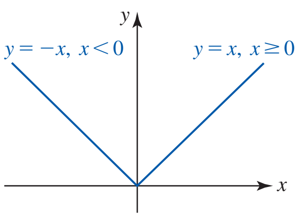
La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.1.7. ■

Semicírculos Como se muestra en la figura 1.1.3*b*), un círculo no es la gráfica de una función. En realidad, una ecuación como $x^2 + y^2 = 9$ define (por lo menos) dos funciones de x. Si esta ecuación se resuelve para y en términos de x, se obtiene $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Debido a la convención del valor único del signo $\sqrt{}$, ambas ecuaciones $y = \sqrt{9 - x^2}$ y $y = -\sqrt{9 - x^2}$ definen funciones. La primera ecuación define un **semicírculo superior**, y la segunda un **semicírculo inferior**. Con base en las gráficas mostradas en la FIGURA 1.1.8, el dominio de $y = \sqrt{9 - x^2}$ es $[-3, 3]$ y el rango es $[0, 3]$; el dominio y el rango de $y = -\sqrt{9 - x^2}$ son $[-3, 3]$ y $[-3, 0]$, respectivamente.

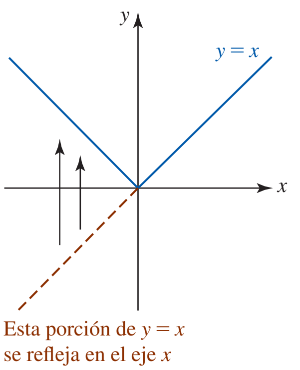


a) Semicírculo superior *b*) Semicírculo inferior

FIGURA 1.1.8 Estos semicírculos son gráficas de funciones



a)



b)

FIGURA 1.1.9 Función valor absoluto (3)

Función valor absoluto La función $f(x) = |x|$, denominada **función valor absoluto**, aparece a menudo en el análisis de capítulos ulteriores. El dominio de f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es $[0, \infty)$. En otras palabras, para cualquier número real x, los valores de la función $f(x)$ son no negativos. Por ejemplo,

$$f(3) = |3| = 3, \quad f(0) = |0| = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Por definición del valor absoluto de x, observamos que f es una función definida por partes o pedazos, que consta de dos partes

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Su gráfica, mostrada en la FIGURA 1.1.9*a*), consta de dos semirrectas perpendiculares. Puesto que $f(x) \geq 0$ para toda x, otra forma de graficar (3) consiste en simplemente trazar la recta $y = x$ y luego reflejar en el eje x esa porción de la recta que está abajo del eje x. Vea la figura 1.1.9*b*).

Función entero mayor A continuación se considerará una función f definida por partes denominada **función entero mayor**. Esta función, que tiene muchas notaciones, se denotará aquí por $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y está definida por la regla

$$\lfloor x \rfloor = n, \quad \text{donde } n \text{ es un entero que satisface } n \leq x < n + 1. \tag{4}$$

La función entero mayor también se escribe como $f(x) = [\![x]\!]$.

La expresión (4), traducida a lenguaje coloquial, significa lo siguiente:

- El valor funcional $f(x)$ es el entero mayor n que es menor o igual a x.

Por ejemplo,

$$f(-1.5) = -2,\ f(0.4) = 0,\ f(\pi) = 3,\ f(5) = 5,$$

y así en lo sucesivo. El dominio de f es el conjunto de números reales y consta de la unión de una infinidad de intervalos ajenos; en otras palabras, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ es una función definida por partes dada por

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = \begin{cases} \quad \vdots \\ -2, & -2 \leq x < -1 \\ -1, & -1 \leq x < 0 \\ \ \ 0, & \ \ 0 \leq x < 1 \\ \ \ 1, & \ \ 1 \leq x < 2 \\ \ \ 2, & \ \ 2 \leq x < 3 \\ \quad \vdots \end{cases} \tag{5}$$

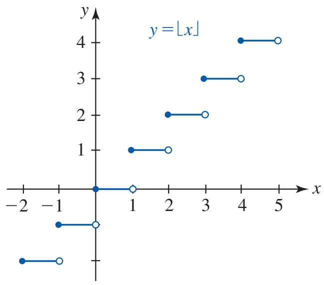


FIGURA 1.1.10 Función mayor entero

El rango de f es el conjunto de enteros. La porción de la gráfica de f sobre el intervalo cerrado $[-2, 5]$ se proporciona en la FIGURA 1.1.10.

En informática la función entero mayor se conoce como **función redondeo hacia el entero inferior anterior**. Una función relacionada denominada **función redondeo hacia el entero superior siguiente*** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x. Vea los problemas 57 a 59 en los ejercicios 1.1.

Un modelo matemático A menudo resulta aconsejable describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno de la vida real, ya sea físico, sociológico e incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina **modelo matemático** y puede ser tan complicada como cientos de ecuaciones simultáneas o tan sencilla como una sola función. Esta sección concluye con una ilustración del mundo real de una función definida por partes denominada *función timbre postal*. Esta función es semejante a $f(x) = \lfloor x \rfloor$ en el sentido de que ambos son ejemplos de *funciones escalón*; cada función es constante sobre un intervalo y luego salta a otro valor constante al siguiente intervalo colindante.

Al momento de escribir esto, la tarifa de primera clase del Servicio Postal de Estados Unidos de América para el porte de una carta en un sobre de tamaño normal dependía de su peso en onzas:

$$\text{Porte} = \begin{cases} \$0.42, & 0 < \text{peso} \leq 1 \text{ onza} \\ \$0.59, & 1 < \text{peso} \leq 2 \text{ onzas} \\ \$0.76, & 2 < \text{peso} \leq 3 \text{ onzas} \\ \quad \vdots \\ \$2.87, & 12 < \text{peso} \leq 13 \text{ onzas.} \end{cases} \tag{6}$$

La regla en (6) es una función de P que consta de 14 partes (las cartas que pesan más de 13 onzas se envían como correo prioritario). Un valor de la función $P(w)$ es una de 14 constantes; la constante cambia dependiendo del peso w (en onzas) de la carta.† Por ejemplo,

$$P(0.5) = \$0.42,\ P(1.7) = \$0.59,\ P(2.2) = \$0.76,\ P(2.9) = \$0.76 \text{ y } P(12.1) = \$2.87.$$

El dominio de la función P es la unión de los intervalos:

$$(0, 1] \cup (1, 2] \cup (2, 3] \cup \cdots \cup (12, 13] = (0, 13].$$

---

* Las funciones redondeo hacia el entero inferior anterior y redondeo hacia el entero superior siguiente y sus notaciones se deben al renombrado científico canadiense Kenneth E. Iverson (1920-2004).

† En (6) no se muestra que el porte de una carta cuyo peso se encuentra en el intervalo (3, 4] es determinado por si su peso está en (3, 3.5] o en (3.5, 4]. Éste es el único intervalo dividido de esta manera.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se traza la gráfica de una función, nunca se debe acudir a graficar muchos puntos manualmente. Esto es algo que una calculadora gráfica o un sistema de álgebra computacional (SAC) hacen bien. Por otra parte, usted no debe volverse dependiente de una calculadora para obtener una gráfica. Lo crea o no, hay muchos profesores de cálculo que no permiten el uso de calculadoras gráficas al aplicar cuestionarios o exámenes. Por lo general, no hay objeción para que usted use calculadoras o computadoras como ayuda para comprobar algunos problemas de tarea, pero en el salón de clases los maestros desean ver el producto de su propio esfuerzo, es decir, su capacidad de analizar. Así, está usted fuertemente motivado a desarrollar sus habilidades para graficar hasta el punto en que pueda trazar a mano rápidamente la gráfica de una función a partir de alguna propiedad conocida de tipos de funciones y trazar un mínimo de puntos bien escogidos.

Ejercicios 1.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre los valores funcionales indicados.

1. Si $f(x) = x^2 - 1$; $f(-5), f(-\sqrt{3}), f(3)$ y $f(6)$

2. Si $f(x) = -2x^2 + x$; $f(-5), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(2)$ y $f(7)$

3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f(-1), f(0), f(3)$ y $f(5)$

4. Si $f(x) = \sqrt{2x+4}$; $f\left(-\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{5}{2}\right)$ y $f(4)$

5. Si $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$; $f(-1), f(0), f(1)$ y $f(\sqrt{2})$

6. Si $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3-2}$; $f(-\sqrt{2}), f(-1), f(0)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right)$

En los problemas 7 y 8, encuentre

$$f(x), f(2a), f(a^2), f(-5x), f(2a+1), f(x+h)$$

para la función dada f y simplifique lo más que pueda.

7. $f(\quad) = -2(\quad)^2 + 3(\quad)$

8. $f(\quad) = (\quad)^3 - 2(\quad)^2 + 20$

9. ¿Para qué valores de x $f(x) = 6x^2 - 1$ es igual a 23?

10. ¿Para qué valores de x $f(x) = \sqrt{x-4}$ es igual a 4?

En los problemas 11-26, encuentre el dominio de la función f dada.

11. $f(x) = \sqrt{4x-2}$

12. $f(x) = \sqrt{15-5x}$

13. $f(x) = \dfrac{10}{\sqrt{1-x}}$

14. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x-1}}$

15. $f(x) = \dfrac{2x-5}{x(x-3)}$

16. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2-10x+25}$

18. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-4x-12}$

19. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-x+1}$

20. $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-2x-1}$

21. $f(x) = \sqrt{25-x^2}$

22. $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$

23. $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$

24. $f(x) = \sqrt{x^2-3x-10}$

25. $f(x) = \sqrt{\dfrac{3-x}{x+2}}$

26. $f(x) = \sqrt{\dfrac{5-x}{x}}$

En los problemas 27-30, determine si la gráfica en la figura es la gráfica de una función.

27.

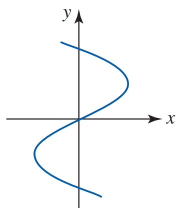


FIGURA 1.1.11 Gráfica para el problema 27

28.

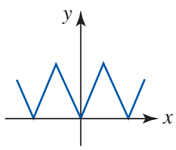


FIGURA 1.1.12 Gráfica para el problema 28

29.

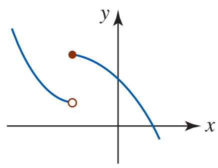


FIGURA 1.1.13 Gráfica para el problema 29

30.

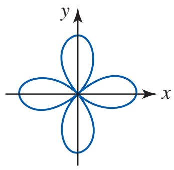


FIGURA 1.1.14 Gráfica para el problema 30

En los problemas 31-34, use el rango de la función f dada en la figura para encontrar su dominio y rango.

31.

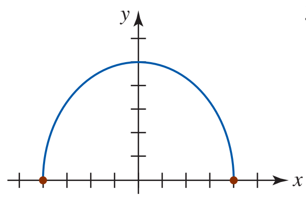


FIGURA 1.1.15 Gráfica para el problema 31

32.

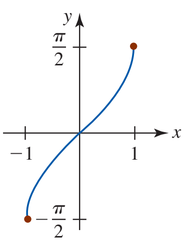


FIGURA 1.1.16 Gráfica para el problema 32

33.

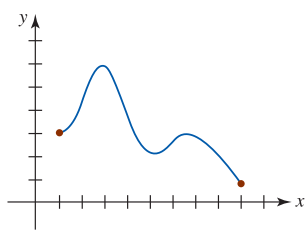


FIGURA 1.1.17 Gráfica para el problema 33

34.

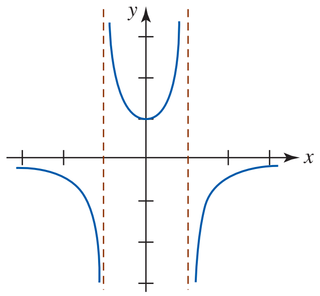


FIGURA 1.1.18 Gráfica para el problema 34

En los problemas 35-44, encuentre las intersecciones x y y de la gráfica de la función dada f, en caso de haberlas. No grafique.

35. $f(x) = \frac{1}{2}x - 4$

36. $f(x) = x^2 - 6x + 5$

37. $f(x) = 4(x - 2)^2 - 1$

38. $f(x) = (2x - 3)(x^2 + 8x + 16)$

39. $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

40. $f(x) = x^4 - 1$

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 16}$

42. $f(x) = \dfrac{x(x + 1)(x - 6)}{x + 8}$

43. $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}$

44. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2x - 3}$

En los problemas 45 y 46, use la gráfica de la función f dada en la figura para estimar los valores $f(-3), f(-2), f(-1), f(1), f(2)$ y $f(3)$. Calcule la intersección y.

45.

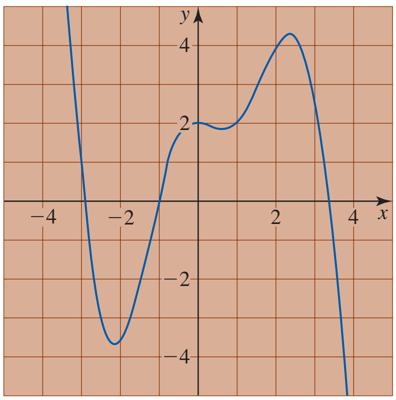


FIGURA 1.1.19 Gráfica para el problema 45

46.

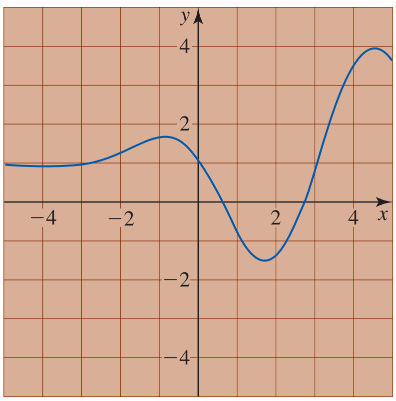


FIGURA 1.1.20 Gráfica para el problema 46

En los problemas 47 y 48, use la gráfica de la función f dada en la figura para estimar los valores $f(-2), f(-1.5), f(0.5), f(1), f(2)$ y $f(3.2)$. Calcule las intersecciones x.

47.

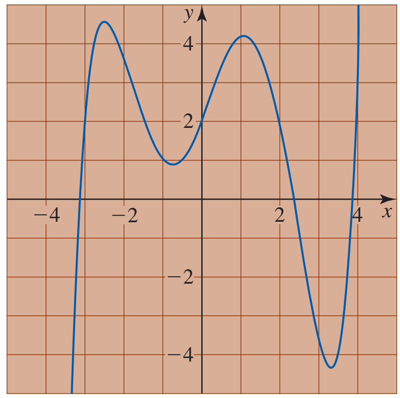


FIGURA 1.1.21 Gráfica para el problema 47

48.

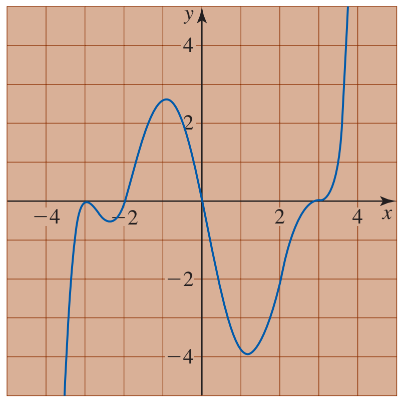


FIGURA 1.1.22 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49 y 50, encuentre dos funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ definidas por la ecuación dada. Encuentre el dominio de las funciones f_1 y f_2.

49. $x = y^2 - 5$

50. $x^2 - 4y^2 = 16$

51. Algunas de las funciones que encontrará después en este texto tienen como dominio el conjunto de enteros positivos n. La **función factorial** $f(n) = n!$ se define como el producto de los n primeros enteros positivos; es decir,

$$f(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n.$$

a) Evalúe $f(2), f(3), f(5)$ y $f(7)$.
b) Demuestre que $f(n + 1) = f(n) \cdot (n + 1)$.
c) Simplifique $f(5)/f(4)$ y $f(7)/f(5)$.
d) Simplifique $f(n + 3)/f(n)$.

52. Otra función de un entero positivo n proporciona la suma de los n primeros enteros positivos al cuadrado:

$$S(n) = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

a) Encuentre el valor de la suma $1^2 + 2^2 + \cdots + 99^2 + 100^2$.
b) Encuentre n tal que $300 < S(n) < 400$. [*Sugerencia*: Use calculadora.]

Piense en ello

53. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo dominio es

a) $[3, \infty)$ *b)* $(3, \infty)$.

54. Determine una ecuación de una función $y = f(x)$ cuyo rango es

a) $[3, \infty)$ *b)* $(3, \infty)$.

55. Con base en la gráfica de $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ dada en la FIGURA 1.1.23, determine el rango y dominio de la función $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Explique su razonamiento en una o dos frases.

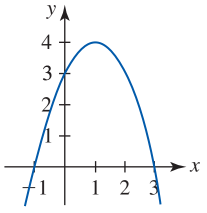


FIGURA 1.1.23 Gráfica para el problema 55

56. Sea P cualquier punto $(x, f(x))$ sobre la gráfica de una función f. Suponga que los segmentos de recta PT y PS son perpendiculares a los ejes x y y. Sean M_1, M_2 y M_3, respectivamente, los puntos medios de PT, PS y ST como se muestra en la FIGURA 1.1.24. Encuentre una función que describa la ruta de los puntos M_1. Repita lo anterior para los puntos M_2 y M_3.

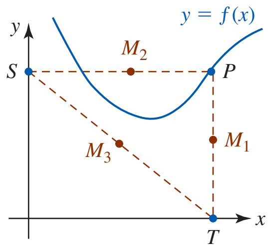


FIGURA 1.1.24 Gráfica para el problema 56

57. En la página 7 se vio que la **función redondeo hacia el entero superior siguiente** $g(x) = \lceil x \rceil$ se define como el menor entero n que es mayor o igual a x. Llene los espacios en blanco.

$$g(x) = \lceil x \rceil = \begin{cases} \vdots \\ \_\_\_\_\_\_, & -3 < x \le -2 \\ \_\_\_\_\_\_, & -2 < x \le -1 \\ \_\_\_\_\_\_, & -1 < x \le 0 \\ \_\_\_\_\_\_, & 0 < x \le 1 \\ \_\_\_\_\_\_, & 1 < x \le 2 \\ \_\_\_\_\_\_, & 2 < x \le 3 \\ \vdots \end{cases}$$

58. Grafique la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ definida en el problema 57.

59. La función definida por partes

$$\operatorname{int}(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \ge 0 \\ \lceil x \rceil, & x < 0 \end{cases}$$

se denomina **función entero**. Grafique $\operatorname{int}(x)$.

60. Analice cómo graficar la función $f(x) = |x| + |x - 3|$. Lleve a cabo sus ideas.

En los problemas 61 y 62, describa con palabras cómo difieren las gráficas de las funciones dadas.

61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 4, & x = 3 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \ne 3 \\ 6, & x = 3 \end{cases}$$

62. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$,

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1}, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

1.2 Combinación de funciones

Introducción Dos funciones f y g pueden combinarse en varias formas para obtener nuevas funciones. En esta sección se analizarán dos formas en que es posible combinar funciones: mediante operaciones aritméticas y a través de la operación de composición de funciones.

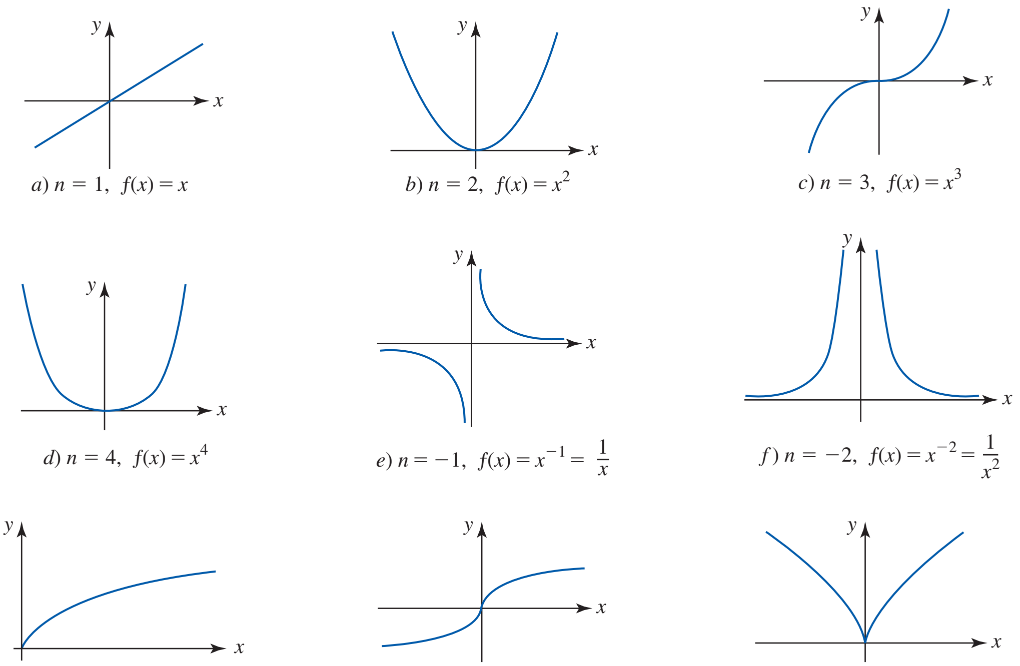
Funciones potencia Una función de la forma

$$f(x) = x^n \tag{1}$$

se denomina **función potencia**. En esta sección consideraremos que n es un número racional. El dominio de la función potencia depende de la potencia n. Por ejemplo, para $n = 2$, $n = \frac{1}{2}$ y $n = -1$, respectivamente,

- el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales o $(-\infty, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$,
- el dominio de $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ es el conjunto R de números reales excepto $x = 0$.

Las funciones potencia simples, o versiones modificadas de estas funciones, ocurren tan a menudo en problemas en cálculo que no es conveniente desperdiciar tiempo valioso trazando sus gráficas. Se sugiere conocer (memorizar) el breve catálogo de gráficas de funciones potencia que se proporciona en la FIGURA 1.2.1. Usted debe reconocer la gráfica en el inciso *a*) de la figura 1.2.1 como una **recta** y la gráfica en el inciso *b*) como una **parábola**.



a) $n = 1,\ f(x) = x$ *b*) $n = 2,\ f(x) = x^2$ *c*) $n = 3,\ f(x) = x^3$

d) $n = 4,\ f(x) = x^4$ *e*) $n = -1,\ f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ *f*) $n = -2,\ f(x) = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

g) $n = \dfrac{1}{2},\ f(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$ *h*) $n = \dfrac{1}{3},\ f(x) = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$ *i*) $n = \dfrac{2}{3},\ f(x) = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$

FIGURA 1.2.1 Breve catálogo de gráficas de funciones potencia

Combinaciones aritméticas Dos funciones pueden combinarse por medio de las cuatro conocidas operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división.

Definición 1.2.1 Combinaciones aritméticas

Si f y g son dos funciones, entonces la **suma** $f + g$, la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g se definen como sigue:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \tag{2}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x), \tag{3}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ da } g(x) \neq 0. \tag{5}$$

Dominio de una combinación aritmética Al combinar dos funciones aritméticamente es necesario que ambas f y g estén definidas en el mismo número x. Por tanto, el **dominio** de las funciones $f + g, f - g$ y fg es el conjunto de números reales que son *comunes* a ambos dominios; es decir, el dominio es la *intersección* del dominio de f con el dominio de g. En el caso del cociente f/g, el dominio también es la intersección de los dos dominios, *pero* también es necesario excluir cualquier valor de x para el que el denominador $g(x)$ sea cero. En otras palabras, si el dominio de f es el conjunto X_1 y el dominio de g es el conjunto X_2, entonces el dominio de $f + g, f - g$ y fg es $X_1 \cap X_2$, y el dominio de f/g es $\{x | x \in X_1 \cap X_2, g(x) \neq 0\}$.

EJEMPLO 1 Suma de dos funciones potencia

Ya se ha visto que el dominio de $f(x) = x^2$ es el conjunto R de números reales, o $(-\infty, \infty)$, y el dominio de $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$. En consecuencia, el dominio de la suma

$$f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x}$$

es la intersección de los dos dominios: $(-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$. ■

Funciones polinomiales Muchas de las funciones con las que se trabaja en cálculo se construyen al realizar operaciones aritméticas sobre funciones potencia. De especial interés son las funciones potencia (1) donde n es un entero no negativo. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, la función $f(x) = x^n$ se denomina **función polinomial de un solo término**. Al usar las operaciones aritméticas de suma, resta y multiplicación es posible construir funciones polinomiales con muchos términos. Por ejemplo, si $f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x$ y $f_4(x) = 1$, entonces

$$f_1(x) - f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) = x^3 - x^2 + x + 1.$$

En general, una **función polinomial** $y = f(x)$ es una función de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{6}$$

donde n es un entero no negativo y los coeficientes a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ son números reales. El **dominio** de cualquier función polinomial f es el conjunto de todos los números reales $(-\infty, \infty)$. Las siguientes funciones *no son* polinomiales:

$$y = 5x^2 - 3x^{\overset{\text{no es un entero no negativo}}{\downarrow}\atop -1} \qquad \text{y} \qquad y = 2x^{\overset{\text{no es un entero no negativo}}{\downarrow}\atop 1/2} - 4.$$

EJEMPLO 2 Suma, diferencias, producto y cociente

Considere las funciones polinomiales $f(x) = x^2 + 4x$ y $g(x) = x^2 - 9$.

a) Con base en los numerales (2)-(4) de la definición 1.2.1 es posible producir tres nuevas funciones polinomiales:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x) = (x^2 + 4x) + (x^2 - 9) = 2x^2 + 4x - 9,\\ (f - g)(x) &= f(x) - g(x) = (x^2 + 4x) - (x^2 - 9) = 4x + 9,\\ (fg)(x) &= f(x)g(x) = (x^2 + 4x)(x^2 - 9) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x.\end{aligned}$$

b) Finalmente, con base en el numeral (5) de la definición 1.2.1,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}.$$ ■

Observe en el ejemplo 2, puesto que $g(-3) = 0$ y $g(3) = 0$, que el dominio del cociente $(f/g)(x)$ es $(-\infty, \infty)$ con $x = 3$ y $x = -3$ excluidos; en otras palabras, el dominio de $(f/g)(x)$ es la unión de tres intervalos: $(-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$.

Funciones racionales La función en el inciso *b*) del ejemplo 2 es un caso de funciones racionales. En general, una **función racional** $y = f(x)$ es una función de la forma

Las funciones polinomiales y racionales se analizarán con más detalle en la sección 1.3.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{7}$$

donde p y q son funciones polinomiales. Por ejemplo, las funciones

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}, \quad y = \frac{\overset{\text{polinomio}}{\downarrow}\atop x^3 - x + 7}{x + 3 \atop \underset{\text{polinomio}}{\uparrow}}, \quad y = \frac{1}{x},$$

son funciones racionales. La función

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1} \quad \leftarrow \text{no es un polinomio}$$

no es una función racional.

Composición de funciones Otro método para combinar las funciones f y g se denomina **composición de funciones**. Para ilustrar la idea, se supondrá que para una x dada en el dominio de g el valor funcional $g(x)$ es un número en el dominio de la función f. Esto significa que es posible evaluar f en $g(x)$; en otras palabras, $f(g(x))$. Por ejemplo, suponga $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces, para $x = 1$, $g(1) = 3$, y como 3 es el dominio de f, es posible escribir $f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9$. En efecto, para estas dos funciones particulares resulta que es posible evaluar f en cualquier valor funcional $g(x)$; es decir,

$$f(g(x)) = f(x + 2) = (x + 2)^2.$$

A continuación se define la función resultante, denominada **composición de *f* y *g***.

Definición 1.2.2 Composición de funciones

Si f y g son dos funciones, la **composición de *f* y *g***, denotada por $f \circ g$, es la función definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)). \tag{8}$$

La **composición de *g* y *f***, denotada por $g \circ f$, es la función definida por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)). \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Dos composiciones

Si $f(x) = x^2 + 3x$ y $g(x) = 2x^2 + 1$, encuentre

a) $(f \circ g)(x)$ y ***b***) $(g \circ f)(x)$.

Solución

a) Para hacer énfasis se sustituye x por el conjunto de paréntesis ( ) y f se escribe en la forma $f(x) = (\ \ )^2 + 3(\ \ )$. Entonces, para evaluar $(f \circ g)(x)$, cada conjunto de paréntesis se llena con $g(x)$. Se encuentra

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(2x^2 + 1)\\ &= (2x^2 + 1)^2 + 3(2x^2 + 1)\\ &= 4x^4 + 4x^2 + 1 + 3 \cdot 2x^2 + 3 \cdot 1\\ &= 4x^4 + 10x^2 + 4.\end{aligned}$$

b) En este caso, g se escribe en la forma $g(x) = 2(\ \ )^2 + 1$. Así,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) &= g(x^2 + 3x)\\ &= 2(x^2 + 3x)^2 + 1\\ &= 2(x^4 + 6x^3 + 9x^2) + 1\\ &= 2x^4 + 12x^3 + 18x^2 + 1.\end{aligned}$$

■

Los incisos *a*) y *b*) del ejemplo 3 ilustran que la composición de funciones no es conmutativa. Es decir, en general

$$f \circ g \neq g \circ f.$$

EJEMPLO 4 Escritura de una función como una composición

Exprese $F(x) = \sqrt{6x^3 + 8}$ como la composición de dos funciones f y g.

Solución Si f y g se definen como $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 6x^3 + 8$, entonces

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(6x^3 + 8) = \sqrt{6x^3 + 8}.$$

■

Hay otras dos soluciones para el ejemplo 4. Por ejemplo, si las funciones f y g se definen por $f(x) = \sqrt{6x + 8}$ y $g(x) = x^3$, observe entonces que $(f \circ g)(x) = f(x^3) = \sqrt{6x^3 + 8}$.

Dominio de una composición Para evaluar la composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ el número $g(x)$ debe estar en el dominio de f. Por ejemplo, el dominio de $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$ y el dominio de $g(x) = x - 2$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$. Observe que no es posible evaluar $f(g(1))$ porque $g(1) = -1$ y -1 no está en el dominio de f. Para poder sustituir $g(x)$ en $f(x)$, $g(x)$ debe satisfacer la desigualdad que define al dominio de f, a saber: $g(x) \geq 0$. Esta última desigualdad es la misma que $x - 2 \geq 0$ o $x \geq 2$. El dominio de la composición $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x - 2}$ es $[2, \infty)$, que sólo es una porción del dominio original $(-\infty, \infty)$ de g. En general, el **dominio de la composición** $f \circ g$ es el conjunto de números x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f.

Para una constante $c > 0$, las funciones definidas por $y = f(x) + c$ y $y = f(x) - c$ son la *suma* y la *diferencia* de la función $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. La función $y = cf(x)$ es el *producto* de $f(x)$ y la función constante $g(x) = c$. Las funciones definidas por $y = f(x + c)$, $y = f(x - c)$ y $y = f(cx)$ son las *composiciones* de $f(x)$ con las funciones polinomiales $g(x) = x + c$, $g(x) = x - c$ y $g(x) = cx$, respectivamente. Como veremos dentro de poco, la gráfica de cada una de éstas no es una **transformación rígida** ni una **transformación no rígida** de la gráfica de $y = f(x)$.

Transformaciones rígidas Una **transformación rígida** de una gráfica es una transformación que cambia sólo la *posición* de la gráfica en el plano xy, pero no su forma. Para la gráfica de una función $y = f(x)$ se analizan cuatro tipos de desplazamientos o traslaciones.

Traslaciones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = f(x) + c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia arriba** c unidades,
- $y = f(x) - c$ es la gráfica de f desplazada verticalmente **hacia abajo** c unidades,
- $y = f(x + c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la izquierda** c unidades,
- $y = f(x - c)$ es la gráfica de f desplazada horizontalmente **hacia la derecha** c unidades.

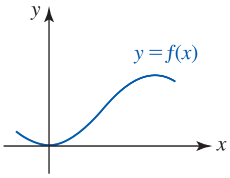
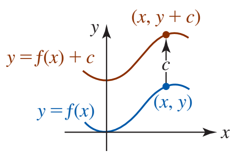
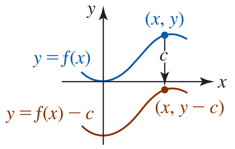


FIGURA 1.2.2 Gráfica de $y = f(x)$

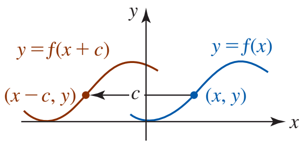
Considere la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 1.2.2. Desplazamientos vertical y horizontal de esta gráfica son las gráficas en rojo en los incisos *a*)-*d*) de la FIGURA 1.2.3. Si (x, y) es un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ y la gráfica de f está desplazada, por ejemplo, hacia arriba por $c > 0$ unidades, entonces $(x, y + c)$ es un punto sobre la nueva gráfica. En general, las coordenadas x no cambian como resultado de un desplazamiento vertical. Vea las figuras 1.2.3*a*) y 1.2.3*b*). En forma semejante, en un desplazamiento horizontal las coordenadas y de puntos sobre la gráfica desplazada son las mismas que sobre la gráfica original. Vea las figuras 1.2.3*c*) y 1.2.3*d*).



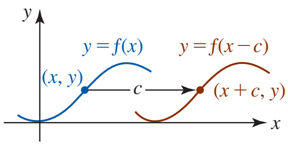
a) Desplazamiento vertical hacia arriba



b) Desplazamiento vertical hacia abajo



c) Desplazamiento horizontal hacia la izquierda

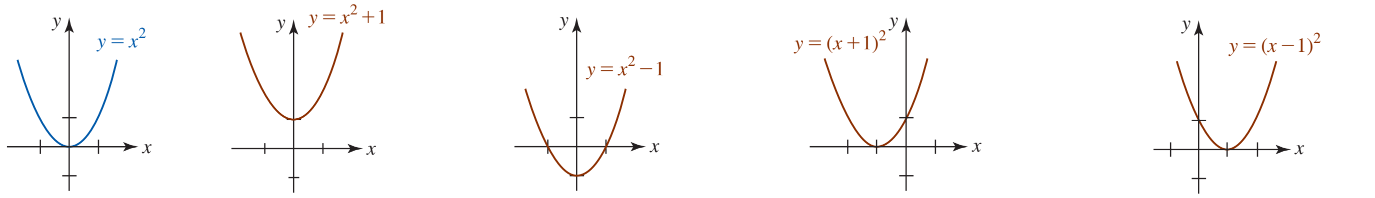


d) Desplazamiento horizontal hacia la derecha

FIGURA 1.2.3 Desplazamientos vertical y horizontal de $y = f(x)$ por una cantidad $c > 0$

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas

Las gráficas de $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$, $y = (x + 1)^2$ y $y = (x - 1)^2$ se obtienen a partir de la gráfica de $f(x) = x^2$ en la FIGURA 1.2.4*a*) al desplazar esta gráfica, a la vez, 1 unidad hacia arriba (figura 1.2.4*b*)), 1 unidad hacia abajo (figura 1.2.4*c*)), 1 unidad hacia la izquierda (figura 1.2.4*d*)) y 1 unidad hacia la derecha (figura 1.2.4*e*)).



a) Punto inicial *b*) Desplazamiento hacia arriba *c*) Desplazamiento hacia abajo *d*) Desplazamiento hacia la izquierda *e*) Desplazamiento hacia la derecha

FIGURA 1.2.4 Gráficas desplazadas en el ejemplo 5 ■

Combinación de desplazamientos En general, la gráfica de una función

$$y = f(x \pm c_1) \pm c_2, \tag{10}$$

El orden en que se hacen los desplazamientos es irrelevante.

donde c_1 y c_2 son constantes positivas, combina un desplazamiento horizontal (a la izquierda o a la derecha) con un desplazamiento vertical (hacia arriba o hacia abajo). Por ejemplo, la gráfica $y = (x + 1)^2 - 1$ es la gráfica de $f(x) = x^2$ desplazada 1 unidad hacia la izquierda seguida por un desplazamiento vertical 1 unidad hacia abajo. La gráfica se proporciona en la FIGURA 1.2.5.

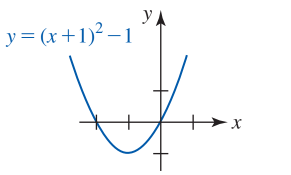


FIGURA 1.2.5 Gráfica obtenida por desplazamientos horizontal y vertical

Otra forma de transformar rígidamente la gráfica de una función es por medio de una **reflexión** en un eje de coordenadas.

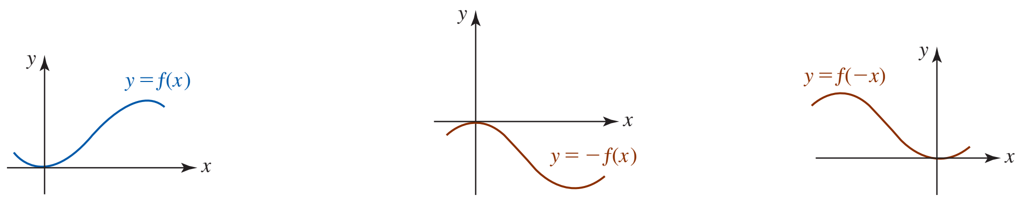
Reflexiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función. Entonces la gráfica de

- $y = -f(x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje *x***,
- $y = f(-x)$ es la gráfica de f reflejada en el **eje *y***.

Reflexión o imagen especular

En la FIGURA 1.2.6*a*) se ha reproducido la gráfica de una función $y = f(x)$ dada en la figura 1.2.2. Las reflexiones de esta gráfica en los ejes x y y se ilustran en las figuras 1.2.6*b*) y 1.2.6*c*). Cada una de estas reflexiones es una **imagen especular** de la gráfica de $y = f(x)$ en el eje coordenado respectivo.



a) Punto inicial *b*) Reflexión en el eje x *c*) Reflexión en el eje y

FIGURA 1.2.6 Reflexiones con respecto a los ejes coordenados

EJEMPLO 6 Reflexiones

Grafique

a) $y = -\sqrt{x}$ ***b***) $y = \sqrt{-x}$.

Solución El punto inicial es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ dada en la FIGURA 1.2.7*a*).

a) La gráfica de $y = -\sqrt{x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje x. Observe en la figura 1.2.7*b*) que como (1, 1) está en la gráfica de f, el punto $(1, -1)$ está en la gráfica de $y = -\sqrt{x}$.

b) La gráfica de $y = \sqrt{-x}$ es la reflexión de la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en el eje y. Observe en la figura 1.2.7*c*) que como (1, 1) está en la gráfica de f, el punto $(-1, 1)$ está en la gráfica de $y = \sqrt{-x}$. La función $y = \sqrt{-x}$ parece algo extraña, pero no olvide que su dominio está determinado por el requerimiento de que $-x \geq 0$, o, de manera equivalente, $x \leq 0$, y así la gráfica reflejada está definida en el intervalo $(-\infty, 0]$.

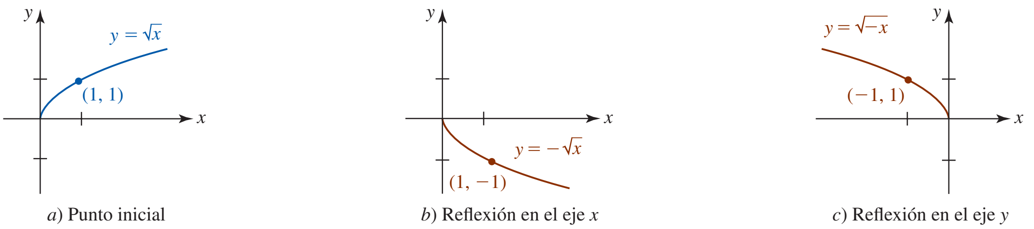


FIGURA 1.2.7 Gráficas en el ejemplo 6 ■

Transformaciones no rígidas Si una función f se multiplica por una constante $c > 0$, la forma de la gráfica cambia pero retiene, *aproximadamente*, su forma original. La gráfica de $y = cf(x)$ es la gráfica de $y = f(x)$ distorsionada verticalmente; la gráfica de f se estira (o elonga) verticalmente o se comprime (o aplana) verticalmente, dependiendo del valor de c. En otros términos, un estiramiento vertical es un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje x, mientras que una compresión vertical es una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje x. La gráfica de la función $y = f(cx)$ está distorsionada horizontalmente, ya sea por un estiramiento de la gráfica de $y = f(x)$ alejándose del eje y o por una compresión de la gráfica de $y = f(x)$ hacia el eje y. El estiramiento o la compresión de una gráfica constituyen ejemplos de **transformaciones no rígidas**.

Estiramientos y compresiones

Suponga que $y = f(x)$ es una función y que c es una constante positiva. Entonces la gráfica de

- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **estirada verticalmente** por un factor de c si $c > 1$,
- $y = cf(x)$ es la gráfica de f **comprimida verticalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **estirada horizontalmente** por un factor de $1/c$ si $0 < c < 1$,
- $y = f(cx)$ es la gráfica de f **comprimida horizontalmente** por un factor de c si $c > 1$.

EJEMPLO 7 Dos compresiones

Dada $f(x) = x^2 - x$, compare las gráficas de

a) $y = \dfrac{1}{2}f(x)$ y ***b)*** $y = f(2x)$.

Solución La gráfica de la función polinomial dada f se muestra en la FIGURA 1.2.8.

a) Con la identificación $c = \frac{1}{2}$, la gráfica de $y = \frac{1}{2}f(x)$ es la gráfica de f comprimida verticalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8*a*), observe en la figura 1.2.8*b*) que las coordenadas y de los tres puntos correspondientes miden la mitad. La gráfica original está girada hacia el eje x.

b) Con la identificación $c = 2$, la gráfica de $y = f(2x)$ es la gráfica de f comprimida horizontalmente por un factor de 2. De los tres puntos mostrados sobre la gráfica de la figura 1.2.8*a*), en la figura 1.2.8*c*) las coordenadas x de los tres puntos correspondientes están divididos entre 2. La gráfica original está girada hacia el eje y.

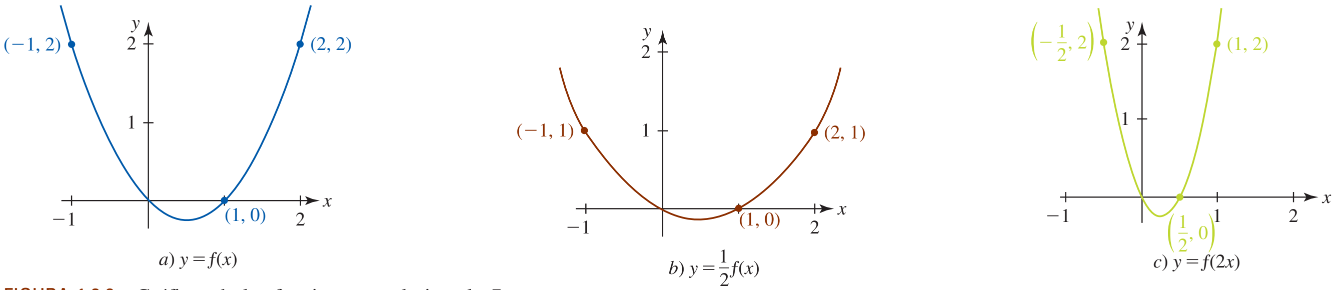


FIGURA 1.2.8 Gráficas de las funciones en el ejemplo 7 ■

El siguiente ejemplo ilustra el desplazamiento, la reflexión y el estiramiento de una gráfica.

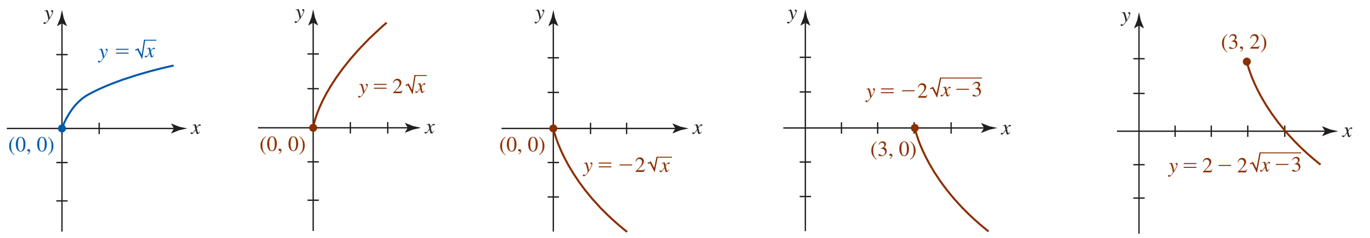
EJEMPLO 8 Combinación de transformaciones

Grafique $y = 2 - 2\sqrt{x - 3}$.

Solución Usted debe reconocer que la función dada consta de cuatro transformaciones de la función básica $f(x) = \sqrt{x}$:

$$y = \overset{\substack{\text{desplazamiento vertical hacia arriba}\\ \downarrow}}{2} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{reflexión en el eje } x}}{-} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{estiramiento vertical}}}{2}\sqrt{\overset{\substack{\text{desplazamiento horizontal hacia la derecha}\\ \downarrow}}{x - 3}}.$$

Empezaremos con la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ en la FIGURA 1.2.9*a*). Las cuatro transformaciones se ilustran en las figuras 1.2.9*b*)-*e*).



a) Punto inicial *b*) Estiramiento vertical *c*) Reflexión en el eje x *d*) Desplazamiento hacia la derecha *e*) Desplazamiento hacia arriba

FIGURA 1.2.9 Gráfica de la función en el ejemplo 8 ■

Simetría Si la gráfica de una función es simétrica con respecto al eje y, decimos que f es una **función par**. Se dice que una función cuya gráfica es simétrica con respecto al origen es una **función impar**. Contamos con las siguientes pruebas para simetría.

Pruebas para simetría de la gráfica de una función

La gráfica de una función f con dominio X es simétrica con respecto al

- **eje y** si $f(-x) = f(x)$ para toda x en X, o bien, (11)
- **origen** si $f(-x) = -f(x)$ para toda x en X. (12)

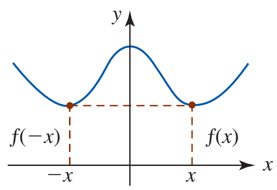


FIGURA 1.2.10 Función par; la gráfica tiene simetría con respecto al eje y

En la FIGURA 1.2.10, observe que si f es una función par y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x)\\ \downarrow}}{y})$$

también es un punto sobre su gráfica. De manera semejante, en la FIGURA 1.2.11 se observa que si f es una función impar y

$$(x, \overset{\substack{f(x)\\ \downarrow}}{y}) \text{ es un punto en su gráfica, entonces necesariamente } (-x, \overset{\substack{f(-x) = -f(x)\\ \downarrow}}{-y})$$

es un punto sobre su gráfica.

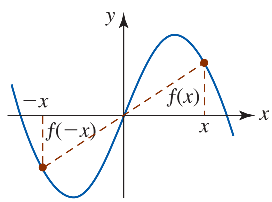


FIGURA 1.2.11 Función impar; la gráfica tiene simetría con respecto al origen

EJEMPLO 9 Funciones pares e impares

a) $f(x) = x^3$ es una función impar, ya que por (12),

$$f(-x) = (-x)^3 = (-1)^3 x^3 = -x^3 = -f(x).$$

Una inspección de la figura 1.1.2*c*) muestra que la gráfica de f es simétrica con respecto al origen. Por ejemplo, puesto que $f(1) = 1$, $(1, 1)$ es un punto sobre la gráfica de $y = x^3$. Debido a que f es una función impar, $f(-1) = -f(1)$ implica que $(-1, -1)$ está sobre la misma gráfica.

***b*)** $f(x) = x^{2/3}$ es una función par, ya que por (11) y las leyes de los exponentes,

$$f(-x) = (-x)^{2/3} = (-1)^{2/3}x^{2/3} = (\underset{\text{la raíz cúbica de } -1 \text{ es } -1}{\sqrt[3]{-1}})^2 x^{2/3} = (-1)^2 x^{2/3} = x^{2/3} = f(x).$$

En la figura 1.2.1*i*) observamos que la gráfica de f es simétrica con respecto al eje y. Por ejemplo, (8, 4) y (−8, 4) son puntos sobre la gráfica de $y = x^{2/3}$.

***c*)** $f(x) = x^3 + 1$ no es par ni impar. Con base en

$$f(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

se observa que $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$. ■

Las gráficas en la figura 1.2.1, con el inciso *g*) como única excepción, presenta simetría con respecto al eje *y* o al origen. Las funciones en las figuras 1.2.1*b*), *d*), *f*) e *i*) son pares, mientras que las funciones en las figuras 1.2.1*a*), *c*), *e*) y *h*) son impares.

Ejercicios 1.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-2.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre $f + g$, $f - g$, fg y f/g.

1. $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -4x + 8$

2. $f(x) = 5x^2$, $g(x) = 7x - 9$

3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+3}$, $g(x) = \dfrac{x-3}{4x+2}$

5. $f(x) = x^2 + 2x - 3$, $g(x) = x^2 + 3x - 4$

6. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

En los problemas 7-10, sean $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = \sqrt{2-x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

7. $f + g$ **8.** fg **9.** f/g **10.** g/f

En los problemas 11-16, encuentre $f \circ g$ y $g \circ f$.

11. $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = x + 6$

12. $f(x) = 4x + 1$, $g(x) = x^2$

13. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3 + x^2$

14. $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \dfrac{1}{2x+4}$

15. $f(x) = \dfrac{3}{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$

16. $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

En los problemas 17 y 18, sean $f(x) = \sqrt{x-3}$ y $g(x) = x^2 + 2$. Encuentre el dominio de la función dada.

17. $f \circ g$ **18.** $g \circ f$

En los problemas 19 y 20, sean $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = 2 - \sqrt{x}$. Encuentre el dominio de la función dada.

19. $g \circ f$ **20.** $f \circ g$

En los problemas 21 y 22, encuentre $f \circ (2f)$ y $f \circ (1/f)$.

21. $f(x) = 2x^3$ **22.** $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$

La composición de tres funciones f, g y h es la función

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))).$$

En los problemas 23 y 24, encuentre $f \circ g \circ h$.

23. $f(x) = x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 3x - 2$

24. $f(x) = \sqrt{x-5}$, $g(x) = x^2 + 2$, $h(x) = \sqrt{2x+1}$

En los problemas 25 y 26, encuentre una función de g.

25. $f(x) = 2x - 5$, $(f \circ g)(x) = -4x + 13$

26. $f(x) = \sqrt{2x+6}$, $(f \circ g)(x) = 4x^2$

En los problemas 27 y 28, exprese la función F como una composición $f \circ g$ de dos funciones f y g.

27. $F(x) = 2x^4 - x^2$ **28.** $F(x) = \dfrac{1}{x^2+9}$

En los problemas 29-36, los puntos (−2, 1) y (3, −4) están sobre la gráfica de la función $y = f(x)$. Encuentre los puntos correspondientes sobre la gráfica, obtenidos por las transformaciones dadas.

29. La gráfica de f desplazada 2 unidades hacia arriba.

30. La gráfica de f desplazada 5 unidades hacia abajo.

31. La gráfica de f desplazada 6 unidades hacia la izquierda.

32. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia la derecha.

33. La gráfica de f desplazada 1 unidad hacia arriba y 4 unidades hacia la izquierda.

34. La gráfica de f desplazada 3 unidades hacia abajo y 5 unidades hacia la derecha.

35. La gráfica de f reflejada en el eje y.

36. La gráfica de f reflejada en el eje x.

En los problemas 37-40, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 2$ ***b***) $y = f(x) - 2$
c) $y = f(x + 2)$ ***d***) $y = f(x - 5)$
e) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$

37.

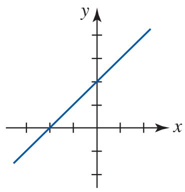


FIGURA 1.2.12 Gráfica para el problema 37

38.

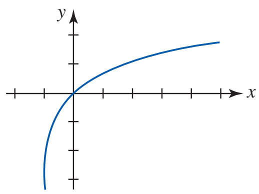


FIGURA 1.2.13 Gráfica para el problema 38

39.

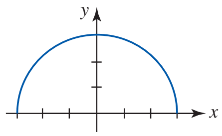


FIGURA 1.2.14 Gráfica para el problema 39

40.

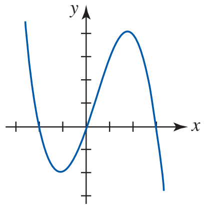


FIGURA 1.2.15 Gráfica para el problema 40

En los problemas 41 y 42, use la gráfica de la función $y = f(x)$ dada en la figura para graficar las siguientes funciones:

a) $y = f(x) + 1$ ***b***) $y = f(x) - 1$
c) $y = f(x + \pi)$ ***d***) $y = f(x - \pi/2)$
e) $y = -f(x)$ ***f***) $y = f(-x)$
g) $y = 3f(x)$ ***h***) $y = -\frac{1}{2}f(x)$

41.

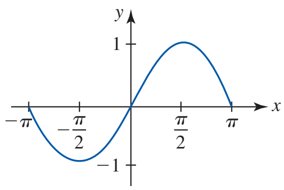


FIGURA 1.2.16 Gráfica para el problema 41

42.

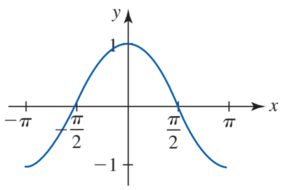


FIGURA 1.2.17 Gráfica para el problema 42

En los problemas 43-46, encuentre la ecuación de la gráfica final después que las transformaciones dadas se aplican a la gráfica de $y = f(x)$.

43. La gráfica de $f(x) = x^3$ desplazada 5 unidades hacia arriba y 1 unidad a la derecha.

44. La gráfica de $f(x) = x^{2/3}$ estirada verticalmente por un factor de 3 unidades y luego desplazada 2 unidades a la derecha.

45. La gráfica de $f(x) = x^4$ reflejada en el eje x y luego desplazada 7 unidades hacia la izquierda.

46. La gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ reflejada en el eje y, luego desplazada 5 unidades hacia la izquierda y 10 unidades hacia abajo.

En los problemas 47 y 48, complete la gráfica de la función dada $y = f(x)$ si

a) f es una función par y ***b***) f es una función impar.

47.

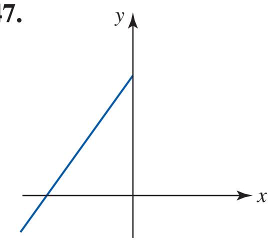


FIGURA 1.2.18 Gráfica para el problema 47

48.

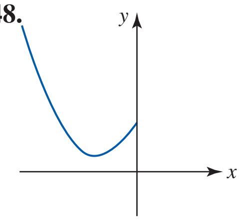


FIGURA 1.2.19 Gráfica para el problema 48

49. Complete la tabla, donde f es una función par.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	2	10	8	0
$g(x)$	2	-3	0	1	-4
$(f \circ g)(x)$					

50. Complete la tabla, donde g es una función impar.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	-2	-3	0	-1	-4
$g(x)$	9	7	-6	-5	13
$(g \circ f)(x)$					

Un clásico matemático En el análisis matemático de circuitos o señales, resulta conveniente definir una función especial que es 0 (apagado) hasta cierto número y luego es 1 (encendido) después de lo anterior. La **función de Heaviside**

$$U(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a \\ 1, & x \geq a, \end{cases}$$

recibe su nombre en honor al brillante y controvertido ingeniero eléctrico y matemático inglés **Oliver Heaviside** (1850-1925). La función U también se denomina **función escalón unitario**.

En los problemas 51 y 52, trace la función dada. La función en el problema 52 algunas veces se denomina **función vagón o ventana**.

51. $y = 2U(x - 1) + U(x - 2)$

52. $y = U\left(x + \frac{1}{2}\right) - U\left(x - \frac{1}{2}\right)$

53. Encuentre la ecuación para la función f ilustrada en la FIGURA 1.2.20 en términos de $U(x - a)$.

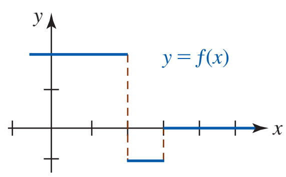


FIGURA 1.2.20 Gráfica para el problema 53

54. La función de Heaviside $U(x - a)$ suele combinarse con otras funciones por adición y multiplicación. Dado que $f(x) = x^2$, compare las gráficas de $y = f(x - 3)$ y $y = f(x - 3)U(x - 3)$.

En los problemas 55 y 56, trace la función dada.

55. $y = (2x - 5)U(x - 1)$ **56.** $y = x - xU(x - 3)$

☰ Piense en ello

57. Determine si $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$ es falsa o verdadera.

58. Suponga que $[-1, 1]$ es el dominio de $f(x) = x^2$. ¿Cuál es el dominio de $y = f(x - 2)$?

59. Explique por qué la gráfica de una función no puede ser simétrica con respecto al eje x.

60. ¿Cuáles puntos, en caso de haber, sobre la gráfica de $y = f(x)$ permanecen fijos; es decir, los mismos sobre la gráfica resultante después de un estiramiento o compresión vertical? ¿Después de una reflexión en el eje x? ¿Después de una reflexión en el eje y?

61. Suponga que el dominio de f es $(-\infty, \infty)$. ¿Cuál es la relación entre la gráfica de $y = f(x)$ y $y = f(|x|)$?

62. Revise las gráficas de $y = x$ y $y = 1/x$ en la figura 1.2.1. Luego analice cómo obtener la gráfica de $y = 1/f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. Trace la gráfica de $y = 1/f(x)$ para la función f cuya gráfica se proporciona en la figura 1.2.15.

63. Suponga que $f(x) = x$ y $g(x) = \lfloor x \rfloor$ es la función redondeo hacia el entero inferior anterior. La diferencia de f y g es la función $\text{frac}(x) = x - \lfloor x \rfloor$ denominada **parte fraccionaria de *x***. Explique el nombre y luego grafique $\text{frac}(x)$.

64. Use la notación de la reflexión de una gráfica en un eje para expresar la función redondeo hacia el entero superior siguiente $g(x) = \lceil x \rceil$ en términos de la función redondeo hacia el entero inferior anterior $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (consulte las páginas 7 y 15).

1.3 Funciones polinomiales y racionales

Introducción En esta sección continúa el repaso de las funciones polinomiales y de las funciones racionales. Funciones como $y = 2x - 1$, $y = 5x^2 - 2x + 4$ y $y = x^3$, donde la variable x se eleva a una *potencia entera no negativa*, son ejemplos de funciones polinomiales. En la sección precedente se vio que una **función polinomial** general $y = f(x)$ tiene la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \tag{1}$$

donde n es un entero no negativo. Una **función racional** es el cociente

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \tag{2}$$

donde p y q son funciones polinomiales.

Funciones polinomiales Las constantes $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ en (1) se denominan **coeficientes**; el número a_n se llama **coeficiente principal** y a_0 se denomina **término constante** del polinomio. Se dice que la mayor potencia de x en un polinomio es el **grado** de éste. De modo que si $a_n \neq 0$, entonces se dice que $f(x)$ en (1) es de **grado *n***. Por ejemplo,

$$f(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeficiente principal}}}{3}\overset{\substack{\text{grado } 5 \\ \downarrow}}{x^5} - 4x^3 - 3x + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{término constante}}}{8}$$

es una función polinomial de grado 5.

Los polinomios de grados $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$ son, respectivamente,

$f(x) = a,$	**función constante**,
$f(x) = ax + b,$	**función lineal**,
$f(x) = ax^2 + bx + c,$	**función cuadrática**,
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$	**función cúbica**.

La función constante $f(x) = 0$ se denomina **polinomio cero**.

Rectas Sin duda, usted está familiarizado con el hecho de que las gráficas de una función constante y una función lineal son **rectas**. Puesto que el concepto de recta juega un papel importante en el estudio del cálculo diferencial, resulta conveniente revisar las ecuaciones de las rectas. En el plano xy hay tres tipos de rectas; rectas horizontales, rectas verticales y rectas inclinadas u oblicuas.

Pendiente Se empezará con la recolección de geometría plana de que por dos puntos distintos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano pasa una sola recta L. Si $x_1 \neq x_2$, entonces el número

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{3}$$

se denomina **pendiente** de la recta determinada por estos dos puntos. Suele acostumbrarse denotar el **cambio en y** o **ascenso vertical** de la recta por $\Delta y = y_2 - y_1$ y el **cambio en x** o **recorrido horizontal** de la recta por $\Delta x = x_2 - x_1$, de modo que (3) se escribe $m = \Delta y/\Delta x$. Vea la FIGURA 1.3.1. Como se indica en la FIGURA 1.3.2, cualquier par de puntos distintos sobre una recta con pendiente, por ejemplo, por (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), (x_4, y_4), determina la misma pendiente. En otras palabras, la pendiente de una recta es independiente de la elección de los puntos sobre la recta.

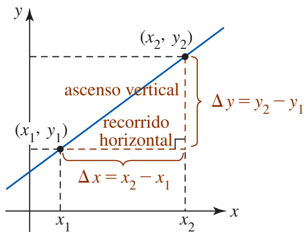


FIGURA 1.3.1 Pendiente de una recta

En la FIGURA 1.3.3 se comparan las gráficas de rectas con pendientes positiva, negativa, cero e indefinida. En la figura 1.3.3*a*) vemos, al leer la gráfica de izquierda a derecha, que una recta con pendiente positiva ($m > 0$) asciende cuando x crece. La figura 1.3.3*b*) muestra que una recta con pendiente negativa ($m < 0$) cae cuando x crece. Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta horizontal, entonces $y_1 = y_2$ y así su ascenso vertical es $\Delta y = y_2 - y_1 = 0$. Por tanto, con base en (3) la pendiente es cero ($m = 0$). Vea la figura 1.3.3*c*). Si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son puntos sobre una recta vertical, entonces $x_1 = x_2$ y así su recorrido horizontal es $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$. En este caso se dice que la pendiente de la recta está **indefinida** o que la recta no tiene pendiente. Vea la figura 1.3.3*d*). Sólo rectas con pendiente son gráficas de funciones.

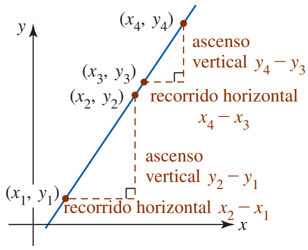
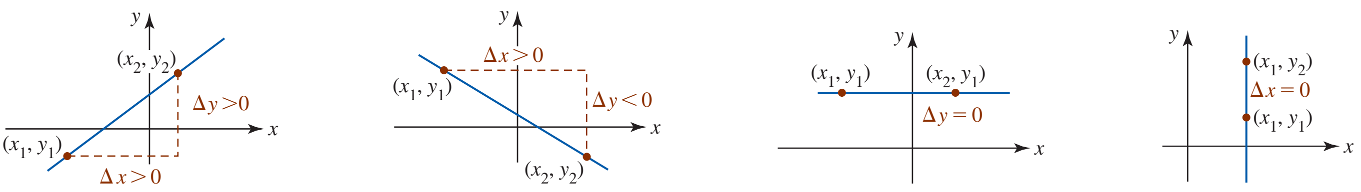


FIGURA 1.3.2 Triángulos semejantes



a) $m > 0$ *b*) $m < 0$ *c*) $m = 0$ *d*) m indefinida

FIGURA 1.3.3 Rectas con pendiente *a*)-*c*); recta sin pendiente *d*)

Ecuaciones de rectas Para encontrar la ecuación de una recta L con pendiente m, se supone que (x_1, y_1) está sobre la recta. Si (x, y) representa cualquier otro punto sobre L, entonces (3) proporciona

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Al multiplicar ambos miembros de la última igualdad por $x - x_1$ se obtiene una ecuación importante. La **ecuación punto-pendiente** de la recta que pasa por (x_1, y_1) con pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1). \tag{4}$$

Cualquier recta que no sea vertical debe cruzar el eje y. Si la intersección y es $(0, b)$, entonces con $x_1 = 0, y_1 = b$, (4) proporciona $y - b = m(x - 0)$. La última ecuación se reduce a la **ecuación pendiente-intercepto** de la recta

$$y = mx + b. \tag{5}$$

EJEMPLO 1 Ecuación de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por los puntos (4, 3) y $(-2, 5)$.

Solución Primero se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos. Con base en (3),

$$m = \frac{5 - 3}{-2 - 4} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}.$$

Luego, la ecuación (4) de una recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen proporciona $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 4)$ o $y = -\frac{1}{3}x + \frac{13}{3}$. ■

Una ecuación de *cualquier* recta en el plano es un caso especial de la **ecuación lineal** general

$$Ax + By + C = 0, \tag{6}$$

donde A, B y C son constantes reales. La característica que proporciona a (6) su nombre *lineal* es que las variables x y y sólo aparecen a la primera potencia. Los casos de interés especial son

$$A = 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{C}{B}, \tag{7}$$

$$A \neq 0, B = 0, \text{ da } x = -\frac{C}{A}, \tag{8}$$

$$A \neq 0, B \neq 0, \text{ da } y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \tag{9}$$

De estas ecuaciones, la primera y la tercera definen funciones. Al volver a identificar a $-C/B$ en (7) como a se obtiene una función constante $y = a$. Al reidentificar a $-A/B$ y $-C/B$ en (9) como a y b, respectivamente, se obtiene la forma de una función lineal $f(x) = ax + b$ que, excepto por algunos símbolos, es la misma que (5). Al volver a identificar $-C/A$ en (8) como a se obtiene la ecuación de una recta vertical $x = a$, que no es una función.

Funciones crecientes-decrecientes Recién acabamos de ver en las figuras 1.3.3*a*) y 1.3.3*b*) que si $a > 0$ (lo cual, desempeña la parte de m), los valores de una función lineal $f(x) = ax + b$ crecen cuando x crece, mientras que para $a < 0$, los valores de $f(x)$ disminuyen cuando x crece. Los conceptos creciente y decreciente pueden extenderse a *cualquier* función. Se dice que una función f es

- **creciente** sobre un intervalo si $f(x_1) < f(x_2)$, y (10)
- **decreciente** sobre un intervalo si $f(x_1) > f(x_2)$. (11)

En la FIGURA 1.3.4*a*) la función f es creciente sobre el intervalo $[a, b]$, mientras f es decreciente sobre el intervalo $[a, b]$ en la figura 1.3.4*b*). Una función lineal $f(x) = ax + b$ crece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a > 0$ y decrece sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $a < 0$.

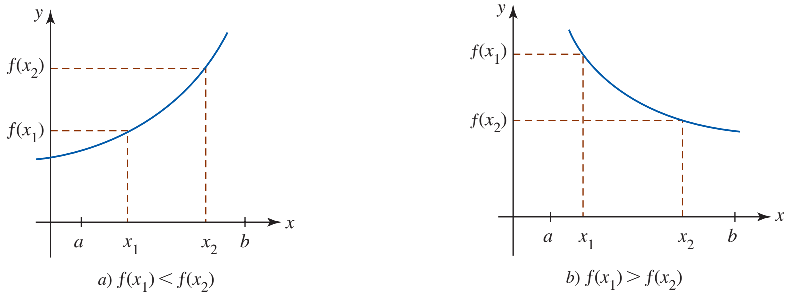


FIGURA 1.3.4 Función creciente en *a*); función decreciente en *b*)

Esta suposición significa que L_1 y L_2 son rectas no verticales.

Rectas paralelas y perpendiculares Si L_1 y L_2 son dos rectas distintas *con pendiente*, entonces necesariamente L_1 y L_2 son paralelas o se cortan. Si las rectas se cortan formando un ángulo recto, se dice que son perpendiculares. Es posible determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares al examinar sus pendientes.

Rectas paralelas y perpendiculares

Suponga que L_1 y L_2 son rectas con pendientes m_1 y m_2, respectivamente. Entonces

- L_1 es **paralela** a L_2 si y sólo si $m_1 = m_2$, y
- L_1 es **perpendicular** a L_2 si y sólo si $m_1 m_2 = -1$.

EJEMPLO 2 Rectas paralelas

Las ecuaciones lineales $3x + y = 2$ y $6x + 2y = 15$ pueden volver a escribirse en las formas de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = -3x + 2$ y $y = -3x + \frac{15}{2}$, respectivamente. Como se anotó en azul y rojo, la pendiente de cada recta es -3. En consecuencia, las rectas son paralelas. Las gráficas de estas ecuaciones se muestran en la FIGURA 1.3.5. ■

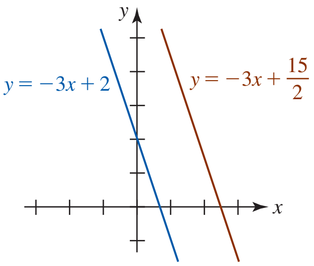


FIGURA 1.3.5 Rectas paralelas en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 Rectas perpendiculares

Encuentre una ecuación de la recta que pasa por $(0, -3)$ y es perpendicular a la gráfica de $4x - 3y + 6 = 0$.

Solución Al despejar y, la ecuación lineal dada produce la forma de la ecuación de la recta dadas su pendiente y su ordenada en el origen $y = \frac{4}{3}x + 2$. Esta recta, cuya gráfica se proporciona en azul en la FIGURA 1.3.6, tiene pendiente $\frac{4}{3}$. La pendiente de cualquier recta perpendicular a ésta es el recíproco negativo de $\frac{4}{3}$, a saber: $-\frac{3}{4}$. Puesto que $(0, -3)$ es la intersección y de la recta requerida, por (5) se concluye que su ecuación es $y = -\frac{3}{4}x - 3$. La gráfica de la última ecuación es la recta roja en la figura 1.3.6. ■

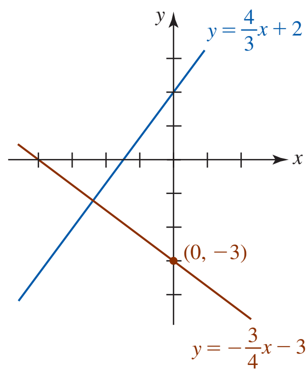


FIGURA 1.3.6 Rectas perpendiculares en el ejemplo 3

Funciones cuadráticas La función elevar al cuadrado $y = x^2$ que se abordó en las secciones 1.1 y 1.2 es un elemento de una familia de funciones denominadas **funciones cuadráticas**; es decir, funciones polinomiales de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, b y c son constantes. Las gráficas de funciones cuadráticas, denominadas **parábolas**, simplemente son transformaciones rígidas y no rígidas de la gráfica de $y = x^2$ mostrada en la FIGURA 1.3.7.

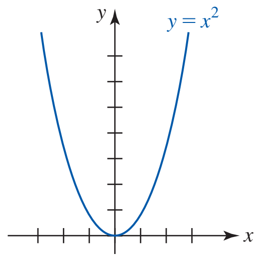


FIGURA 1.3.7 Gráfica de la parábola más simple

Vértice y eje Si la gráfica de una función cuadrática se abre hacia arriba $a > 0$ (o hacia abajo $a < 0$), el punto más bajo (más alto) (h, k) sobre la parábola se denomina **vértice**. Todas las parábolas son simétricas con respecto a una recta vertical que pasa por el vértice (h, k). La recta $x = h$ se denomina **eje** de la parábola. Vea la FIGURA 1.3.8.

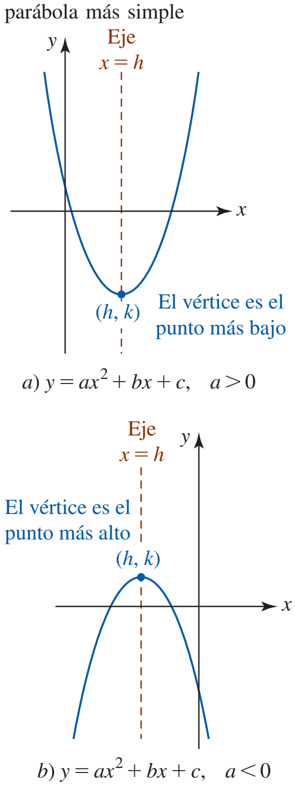


FIGURA 1.3.8 Vértice y eje de una parábola

Forma normal El vértice (h, k) de una parábola puede determinarse al volver a plantear la ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ en **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k. \tag{12}$$

La forma (12) se obtiene a partir de $f(x) = ax^2 + bx + c$ al completar el cuadrado en x. Con la ayuda del cálculo diferencial es posible encontrar el vértice de la parábola sin completar el cuadrado.

Como se muestra con el siguiente ejemplo, al trazar las intersecciones y el vértice puede obtenerse un bosquejo razonable de la parábola. La forma en (12) indica que su gráfica es la gráfica de $y = ax^2$ desplazada horizontalmente $|h|$ unidades y desplazada verticalmente $|k|$ unidades.

EJEMPLO 4 Gráfica usando las intersecciones y el vértice

Grafique $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

Solución Puesto que $a = 1 > 0$, se sabe que la parábola se abre hacia arriba. A partir de $f(0) = -3$ obtenemos la intersección $(0, -3)$. Para averiguar si hay alguna intersección x, resolvemos la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$ por factorización o aplicando la fórmula cuadrática. Con base en $(x + 1)(x - 3) = 0$ encontramos las soluciones $x = -1$ y $x = 3$. Las intersecciones x son $(-1, 0)$ y $(3, 0)$. Para localizar el vértice, se completa el cuadrado:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) - 1 - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4.$$

Así, la forma estándar es $f(x) = (x - 1)^2 - 4$. Al comparar la última ecuación con (12) se identifica $h = 1$ y $k = -4$. Podemos concluir que el vértice se encuentra en el punto $(1, -4)$. Al usar esta información se traza una parábola que pasa por estos cuatro puntos como se muestra en la FIGURA 1.3.9.

Al encontrar el vértice de una parábola, de manera automática se determina el rango de la función cuadrática. Como se muestra claramente en la figura 1.3.9, el rango de f es el intervalo $[-4, \infty)$ sobre el eje y. En la figura 1.3.9 también se muestra que f es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 1]$, pero creciente sobre $[1, \infty)$. ■

Funciones polinomiales de orden superior La gráfica de *toda* función lineal $f(x) = ax + b$ es una recta y la gráfica de *toda* función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Estas declaraciones descriptivas definitivas no pueden hacerse con respecto a la gráfica de una función polinomial de orden superior. ¿Cuál es la forma de la gráfica de una función polinomial de quinto grado? Resulta que la gráfica de una función polinomial de grado $n \geq 3$ puede tener varias formas posibles. En general, graficar una función polinomial f de grado $n \geq 3$ demanda el uso

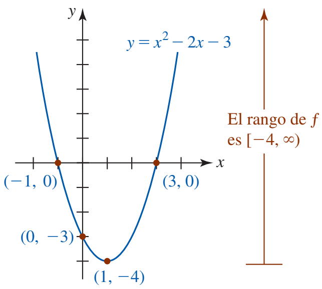


FIGURA 1.3.9 Parábola en el ejemplo 4

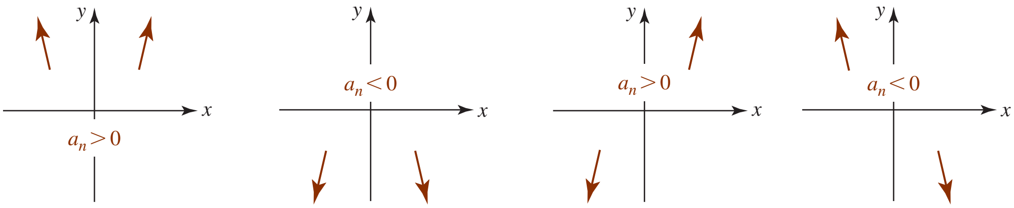
de un instrumento de cálculo o graficado. No obstante, al tener en cuenta el desplazamiento, el comportamiento extremo, las intersecciones y la simetría, es posible en muchos casos trazar rápidamente una gráfica razonable de una función polinomial de orden superior a la vez que el trazado de puntos se mantiene en un mínimo.

Comportamiento final En términos aproximados, el **comportamiento final** de *cualquier* función f es simplemente la forma en que f se comporta para valores muy grandes de $|x|$. En el caso de una función polinomial f de grado n, su gráfica semeja la gráfica de $y = a_n x^n$ para valores grandes de $|x|$. Para ver por qué la gráfica de una función polinomial como $f(x) = -2x^3 + 4x^2 + 5$ se parece a la gráfica de la función polinomial con un solo término $y = -2x^3$ cuando $|x|$ es grande, se factorizará la potencia más alta de x; es decir, x^3:

estos dos términos se vuelven despreciables cuando $|x|$ es grande

$$f(x) = x^3\left(-2 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x^3}\right). \tag{13}$$

Al dejar que $|x|$ crezca sin límite, tanto $4/x$ como $5/x^3$ pueden aproximarse a cero tanto como se quiera. Así, cuando $|x|$ es grande, los valores de la función f en (13) son muy bien aproximados por los valores de $y = -2x^3$. En general, sólo puede haber cuatro tipos de comportamiento extremo para funciones polinomiales. Para interpretar las flechas en la FIGURA 1.3.10 se analizarán las flechas en, por ejemplo, la figura 1.3.10*c*), donde se supone que n es impar y que $a_n > 0$. La posición y la dirección de la flecha izquierda (la flecha izquierda apunta hacia abajo) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección negativa, los valores de $f(x)$ son decrecientes. Planteado en otros términos, la gráfica está apuntando hacia abajo. En forma semejante, la posición y la dirección de la flecha derecha (la flecha derecha apunta hacia arriba) indica que cuando x se vuelve no acotada en la dirección positiva, los valores de $f(x)$ son crecientes (la gráfica apunta hacia arriba). El comportamiento extremo ilustrado en las figuras 1.3.10*a*) y 1.3.10*c*) puede verse en las gráficas que se muestran en la FIGURA 1.3.11 y FIGURA 1.3.12, respectivamente. Las gráficas de las funciones $y = -x$, $y = -x^2$, $y = -x^3$, . . . , $y = -x^8$ son las gráficas en las figuras 1.3.11 y 1.3.12 reflejadas en el eje x, de modo que su comportamiento extremo es como se muestra en las figuras 1.3.10*b*) y 1.3.10*d*).



a) n par *b*) n par *c*) n impar *d*) n impar

FIGURA 1.3.10 El comportamiento extremo de una función polinomial f depende de su grado n y el signo de su coeficiente principal

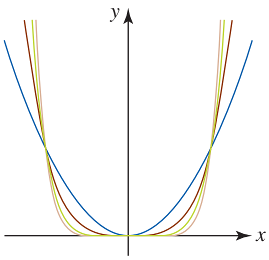


FIGURA 1.3.11 Gráficas de $y = x^2$ (azul), $y = x^4$ (rojo) y $y = x^6$ (verde), $y = x^8$ (dorado)

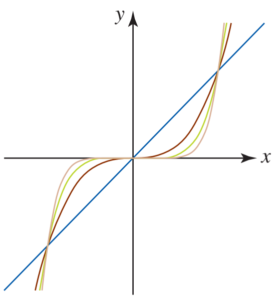


FIGURA 1.3.12 Gráficas de $y = x$ (azul), $y = x^3$ (rojo) y $y = x^5$ (verde), $y = x^7$ (dorado)

Simetría de las funciones polinomiales Resulta fácil identificar por inspección las funciones polinomiales cuyas gráficas poseen **simetría** con respecto al eje y o al origen. La palabras *par* e *impar* tienen un significado especial para las funciones polinomiales. Las condiciones $f(-x) = f(x)$ y $f(-x) = -f(x)$ se cumplen para funciones polinomiales donde todas las potencias de x son enteros pares y enteros impares, respectivamente. Por ejemplo,

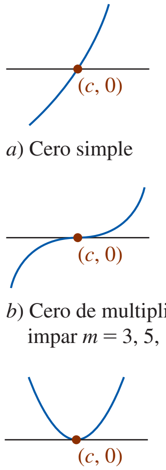
potencias pares potencias impares potencias mixtas

$$\underbrace{f(x) = 5x^4 - 7x^2}_{\text{función par}} \qquad \underbrace{f(x) = 10x^5 + 7x^3 + 4x}_{\text{función impar}} \qquad \underbrace{f(x) = -3x^7 + 2x^4 + x^3 + 2}_{\text{ni par ni impar}}$$

Una función como $f(x) = 3x^6 - x^4 + 6$ es una función par porque todas las potencias son enteros pares; el término constante 6 es en realidad $6x^0$, y 0 es un entero no negativo par.

Intersecciones de las funciones polinomiales La gráfica de toda función polinomial f pasa por el eje y puesto que $x = 0$ está en el dominio de la función. La intersección y es el punto

$(0, f(0))$. Los **ceros** reales de una función polinomial son las coordenadas x de las **intersecciones x** de su gráfica. Un número c es un cero de una función polinomial f de grado n si y sólo si $x - c$ es un factor de f; es decir, $f(x) = (x - c)q(x)$, donde $q(x)$ es un polinomio de grado $n - 1$. Si $(x - c)^m$ es un factor de f, donde $m > 1$ es un entero positivo, y $(x - c)^{m+1}$ *no es* un factor de f, entonces se dice que c es un **cero repetido** o **cero de multiplicidad m**. Cuando $m = 1$, c se denomina **cero simple**. Por ejemplo, $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ son ceros simples de $f(x) = 6x^2 - x - 1$ puesto que f puede escribirse como $f(x) = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, mientras que 5 es un cero repetido o un cero de multiplicidad 2 para $f(x) = x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$. El comportamiento de la gráfica de f en una intersección x $(c, 0)$ depende de si c es un cero simple o un cero de multiplicidad $m > 1$, donde m es un entero impar o par. Vea la FIGURA 1.3.13.



a) Cero simple

b) Cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$

c) Cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$

FIGURA 1.3.13 Intersecciones x de una función polinomial f

Intersecciones x de polinomios

- Si c es un cero simple, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*a*).
- Si c es un cero de multiplicidad impar $m = 3, 5, \ldots$, entonces la gráfica de f pasa directamente por el eje x pero se achata en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*b*).
- Si c es un cero de multiplicidad par $m = 2, 4, \ldots$, entonces la gráfica de f no pasa por el eje x, sino que es tangente a éste, o lo toca, el eje x en $(c, 0)$. Vea la figura 1.3.13*c*).

En el caso en que c es un cero simple o un cero de multiplicidad impar, $f(x)$ cambia de signo en $(c, 0)$, mientras que si c es un cero de multiplicidad par, $f(x)$ no cambia de signo en $(c, 0)$. Observamos que dependiendo del signo del coeficiente principal del polinomio, las gráficas en la figura 1.3.13 pueden estar reflejadas en el eje x.

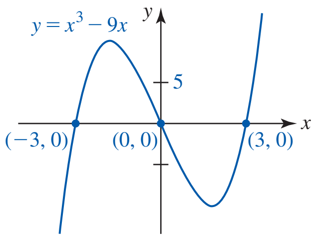


FIGURA 1.3.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

EJEMPLO 5 Gráficas de funciones polinomiales

Grafique

a) $f(x) = x^3 - 9x$ ***b***) $g(x) = (1 - x)(x + 1)^2$ ***c***) $h(x) = -(x + 4)(x - 2)^3$.

Solución

a) Al ignorar todos los términos menos el primero observamos que la gráfica de f semeja la gráfica de $y = x^3$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de f se muestra en la figura 1.3.10*c*). Puesto que todas las potencias son enteros impares, f es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen. Al hacer $f(x) = 0$, a partir de

$$\underbrace{x(x^2 - 9)}_{\text{diferencia de dos cuadrados}} = 0 \qquad \text{o bien} \qquad x(x - 3)(x + 3) = 0$$

notamos que los ceros de f son $x = 0$ y $x = \pm 3$. Puesto que estos números son ceros simples, la gráfica pasa directamente por las intersecciones x en $(0, 0)$, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ como se muestra en la FIGURA 1.3.14.

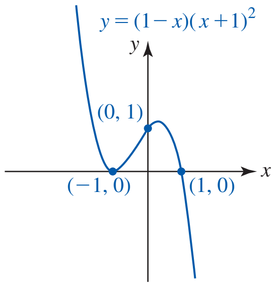


FIGURA 1.3.15 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

b) Al distribuir la multiplicación de los factores, g es la misma que $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ de modo que se observa que la gráfica de g semeja la gráfica de $y = -x^3$ para $|x|$ grande, justo lo opuesto del comportamiento final de la función en el inciso *a*). Debido a que hay potencias pares e impares de x, g no es par ni impar; su gráfica no posee simetría con respecto al eje y o al origen. En virtud de que -1 es un cero de multiplicidad 2, la gráfica es tangente al eje x en $(-1, 0)$. Puesto que 1 es un cero simple, la gráfica pasa directamente por el eje x en $(1, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.15.

c) Al inspeccionar h se observa que su gráfica semeja la gráfica de $y = -x^4$ para $|x|$ grande. Este comportamiento final de h se muestra en la figura 1.3.10*b*). La función h no es par ni impar. A partir de la forma factorizada de $h(x)$, se ve que -4 es un cero simple y así la gráfica de h pasa directamente por el eje x en $(-4, 0)$. Puesto que 2 es un cero de multiplicidad 3, su gráfica se achata cuando pasa por la intersección x $(2, 0)$. Vea la FIGURA 1.3.16. ■

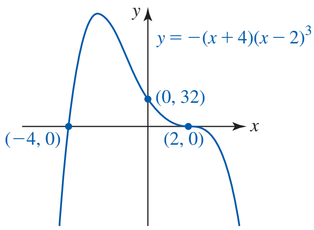


FIGURA 1.3.16 Gráfica de la función en el ejemplo 5*c*)

Funciones racionales Graficar una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es un poco más complicado que graficar una función polinomial porque además de estar atento a las intersecciones, simetría y desplazamiento/reflexión/estiramiento de gráficas conocidas, también es necesario prestar atención al dominio de f y los grados de $p(x)$ y $q(x)$. Estas dos últimas cuestiones son importantes para determinar si la gráfica de una función racional posee *asíntotas*.

Intersecciones de funciones racionales La **intersección *y*** de la gráfica de $f(x) = p(x)/q(x)$ es el punto $(0, f(0))$ en el supuesto de que 0 está en el dominio de f. Por ejemplo, la gráfica de la función racional $f(x) = (1 - x)/x$ no cruza el eje y puesto que $f(0)$ no está definido. Si los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces las **intersecciones *x*** de la gráfica de la función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ son los puntos cuyas coordenadas x son los ceros reales del numerador $p(x)$. En otras palabras, la única forma en que es posible que $f(x) = p(x)/q(x) = 0$ es cuando $p(x) = 0$. Así, para $f(x) = (1 - x)/x$, $1 - x = 0$ se obtiene $x = 1$ y entonces $(1, 0)$ es una intersección x de la gráfica de f.

Asíntotas La gráfica de una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ puede tener asíntotas. Para los objetivos de este libro, las asíntotas pueden ser una recta horizontal, una recta vertical o una recta inclinada. En un nivel práctico, las asíntotas vertical y horizontal de la gráfica de una función racional f pueden determinarse por inspección. Así, por el bien del análisis se supondrá que

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0},\ a_n \neq 0,\ b_m \neq 0, \tag{14}$$

representa una función racional general. El grado de $p(x)$ es n y el grado de $q(x)$ es m.

Asíntotas de gráficas de funciones racionales

Suponga que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) *no tienen factores comunes*.

- Si a es un cero real de $q(x)$, entonces $x = a$ es una **asíntota vertical** para la gráfica de f.
- Si $n = m$, entonces $y = a_n/b_m$ (el cociente de los coeficientes principales) es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f.
- Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una **asíntota horizontal** para la gráfica de f.
- Si $n > m$, entonces la gráfica de f *no* tiene **asíntota horizontal**.
- Si $n = m + 1$, entonces el cociente $y = mx + b$ de $p(x)$ y $q(x)$ es una **asíntota inclinada** para la gráfica de f.

Con base en la lista anterior observamos que las asíntotas horizontal e inclinada son mutuamente excluyentes. En otras palabras, la gráfica de una función racional f no puede tener una asíntota inclinada *y* una asíntota horizontal.

EJEMPLO 6 Gráficas de funciones racionales

Grafique

a) $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ ***b)*** $g(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 5}$.

Solución

a) Se empieza con la observación de que el numerador $p(x) = x$ y el denominador $q(x) = 1 - x^2$ no tienen factores comunes. También, puesto que $f(-x) = -f(x)$, la función f es impar. En consecuencia, su gráfica es simétrica con respecto al origen. Debido a que $f(0) = 0$, la intersección y es $(0, 0)$. Además, $p(x) = x = 0$ implica $x = 0$, de modo que la única intersección es $(0, 0)$. Los ceros del denominador $q(x) = 1 - x^2$ son ± 1. Así, las rectas $x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales. Puesto que el grado del numerador x es 1 y el grado del denominador $1 - x^2$ es 2 (y $1 < 2$), se concluye que $y = 0$ es una asíntota horizontal para la gráfica de f. La gráfica consta de tres *ramas* distintas: una a la izquierda de la recta $x = -1$, una entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$ y una a la derecha de la recta $x = 1$. Vea la FIGURA 1.3.17.

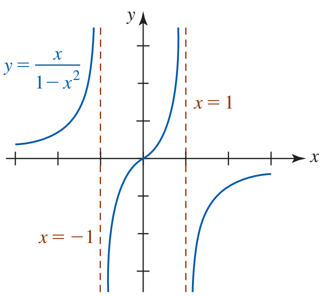


FIGURA 1.3.17 Gráfica de la función en el ejemplo 6*a*)

***b*)** De nuevo, observe que el numerador $p(x) = x^2 - x - 6$ y el denominador $q(x) = x - 5$ de g no tienen factores comunes. Asimismo, f no es impar ni par. A partir de $f(0) = \frac{6}{5}$ se obtiene la intersección y $\left(0, \frac{6}{5}\right)$. Con base en $p(x) = x^2 - x - 6 = 0$ o $(x + 2)(x - 3) = 0$ observamos que -2 y 3 son ceros de $p(x)$. Las intersecciones x son $(-2, 0)$ y $(3, 0)$. Resulta evidente que el cero de $q(x) = x - 5$ es 5, de modo que la recta $x = 5$ es una asíntota vertical. Por último, a partir del hecho de que el grado de $p(x) = x^2 - x - 6$ (que es 2) *es exactamente mayor por uno* que el grado de $q(x) = x - 5$ (que es 1), la gráfica de $f(x)$ tiene una asíntota inclinada. Para encontrarla, $p(x)$ se divide entre $q(x)$. Ya sea por división larga o división sintética, el resultado

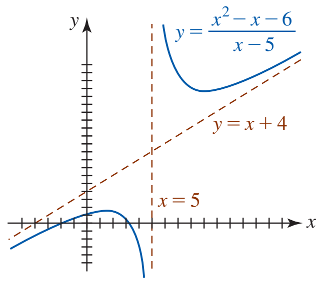


FIGURA 1.3.18 Gráfica de la función en el ejemplo 6*b*)

$$\frac{x^2 - x - 6}{x - 5} = \underbrace{x + 4}_{y\,=\,x\,+\,4 \text{ es la asíntota inclinada}} + \frac{14}{x - 5}$$

muestra que la asíntota inclinada es $y = x + 4$. La gráfica consta de dos ramas: una a la izquierda de la recta $x = 5$ y otra a la derecha de la recta $x = 5$. Vea la FIGURA 1.3.18. ■

Posdata: Gráfica con un hueco En todo el análisis de las asíntotas se supuso que las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ en (14) no tenían factores comunes. Se sabe que si $q(a) = 0$ y $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes, entonces la recta $x = a$ necesariamente es una asíntota vertical para la gráfica de f. Sin embargo, cuando $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces $x = a$ *puede no ser* una asíntota; en la gráfica puede haber simplemente un **hueco**.

Si $p(a) = 0$ y $q(a) = 0$, entonces por el teorema de factorización del álgebra, $x - a$ es un factor tanto de p como de q.

EJEMPLO 7 Gráfica con un hueco

Grafique la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$.

Solución Aunque los ceros de $x^2 - 1 = 0$ son ± 1, sólo $x = 1$ es una asíntota vertical. Observe que el numerador $p(x)$ y el denominador $q(x)$ tienen el factor común $x + 1$, que puede cancelarse en el supuesto de que $x \neq -1$:

$$f(x) = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x + 1)(x - 1)} \overset{\text{la igualdad se cumple para } x \neq -1}{=} \frac{x - 3}{x - 1}. \tag{15}$$

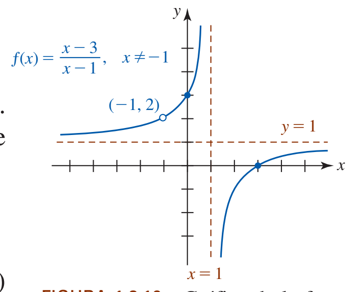


FIGURA 1.3.19 Gráfica de la función en el ejemplo 7

Graficamos $y = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $x \neq -1$, al observar que la intersección y es $(0, 3)$, una intersección x es $(3, 0)$, una asíntota vertical es $x = 1$ y una asíntota horizontal es $y = 1$. Aunque $x = -1$ no es una asíntota vertical, el hecho de que f no está definida en ese número se representa al dibujar un círculo o hueco abierto en la gráfica en el punto correspondiente a $(-1, 2)$. Vea la FIGURA 1.3.19. ■

La coordenada y del hueco es el valor de la fracción reducida (15) en $x = -1$.

$f(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

En las dos últimas secciones hemos trabajado principalmente con funciones polinomiales. Las funciones polinomiales constituyen los objetos fundamentales de una clase conocida como **funciones algebraicas**. En esta sección vimos que una función racional es el cociente de dos funciones polinomiales. En general, una función algebraica implica un número finito de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces cuadradas de funciones polinomiales. Así,

$$y = 2x^2 - 5x, \quad y = \sqrt[3]{x^2}, \quad y = x^4 + \sqrt{x^2 + 5} \quad \text{y} \quad y = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - 2x^2 + 7}$$

son funciones algebraicas. Empezando con la siguiente sección consideraremos funciones que pertenecen a una clase diferente conocida como **funciones trascendentes**. Una función trascendente f se define como una función que *no* es algebraica. Las seis funciones trigonométricas y las funciones exponencial y logarítmica son ejemplos de funciones trascendentes.

Ejercicios 1.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-3.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación de la recta que pasa por (1, 2) con la pendiente indicada.

1. $\frac{2}{3}$ **2.** $\frac{1}{10}$

3. 0 **4.** -2

5. -1 **6.** indefinida

En los problemas 7-10, encuentre la pendiente y las intersecciones x y y de la recta dada. Grafique la recta.

7. $3x - 4y + 12 = 0$ **8.** $\frac{1}{2}x - 3y = 3$

9. $2x - 3y = 9$ **10.** $-4x - 2y + 6 = 0$

En los problemas 11-16, encuentre una ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas.

11. Pasa por (2, 3) y (6, -5)

12. Pasa por (5, -6) y (4, 0)

13. Pasa por (-2, 4) y es paralela a $3x + y - 5 = 0$

14. Pasa por (5, -7) y es paralela al eje y.

15. Pasa por (2, 3) y es perpendicular a $x - 4y + 1 = 0$

16. Pasa por (-5, -4) y es perpendicular a la recta que pasa por (1, 1) y (3, 11).

En los problemas 17 y 18, encuentre una función lineal $f(x) = ax + b$ que cumpla las dos condiciones dadas.

17. $f(-1) = 5, f(1) = 6$

18. $f(-1) = 1 + f(2), f(3) = 4f(1)$

En los problemas 19 y 20, encuentre una ecuación de la recta roja L que se muestra en la figura dada.

19.

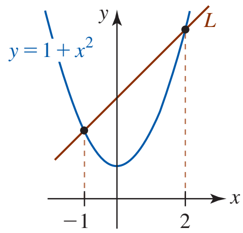


FIGURA 1.3.20 Gráfica para el problema 19

20.

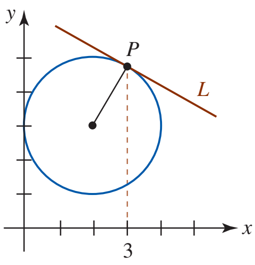


FIGURA 1.3.21 Gráfica para el problema 20

En los problemas 21-26, considere la función cuadrática f.

a) Encuentre todas las intersecciones de la gráfica de f.
b) Exprese la función f en forma normal.
c) Encuentre el vértice y el eje de simetría.
d) Trace la gráfica de f.
e) ¿Cuál es el rango de f?
f) ¿En qué intervalo es creciente f? ¿Y decreciente?

21. $f(x) = x(x + 5)$ **22.** $f(x) = -x^2 + 4x$

23. $f(x) = (3 - x)(x + 1)$ **24.** $f(x) = (x - 2)(x - 6)$

25. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ **26.** $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

En los problemas 27-32, describa con palabras la forma en que es posible obtener la gráfica de la función dada a partir de $y = x^2$ por medio de transformaciones rígidas o no rígidas.

27. $f(x) = (x - 10)^2$ **28.** $f(x) = (x + 6)^2$

29. $f(x) = -\frac{1}{3}(x + 4)^2 + 9$ **30.** $f(x) = 10(x - 2)^2 - 1$

31. $f(x) = (-x - 6)^2 - 4$ **32.** $f(x) = -(1 - x)^2 + 1$

En los problemas 33-42, proceda como en el ejemplo 5 y trace la gráfica de la función polinomial dada f.

33. $f(x) = x^3 - 4x$ **34.** $f(x) = 9x - x^3$

35. $f(x) = -x^3 + x^2 + 6x$ **36.** $f(x) = x^3 + 7x^2 + 12x$

37. $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$

38. $f(x) = (2 - x)(x + 2)(x + 1)$

39. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$ **40.** $f(x) = x^2(x - 2)^2$

41. $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$ **42.** $f(x) = x^5 - 4x^3$

En los problemas 43-48, relacione la gráfica dada con una de las funciones polinomiales en *a*)-*f*).

a) $f(x) = x^2(x - 1)^2$ *b*) $f(x) = -x^3(x - 1)$
c) $f(x) = x^3(x - 1)^3$ *d*) $f(x) = -x(x - 1)^3$
e) $f(x) = -x^2(x - 1)$ *f*) $f(x) = x^3(x - 1)^2$

43.

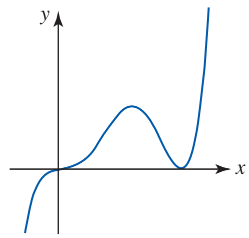


FIGURA 1.3.22 Gráfica para el problema 43

44.

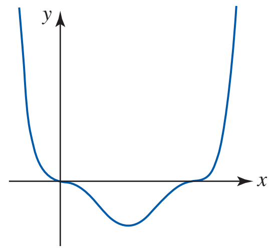


FIGURA 1.3.23 Gráfica para el problema 44

45.

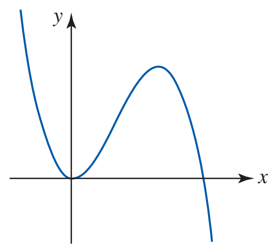


FIGURA 1.3.24 Gráfica para el problema 45

46.

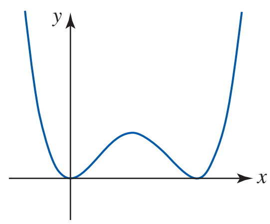


FIGURA 1.3.25 Gráfica para el problema 46

47.

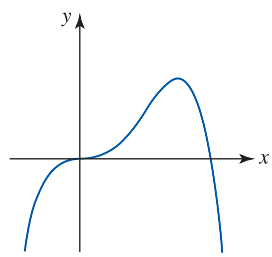


FIGURA 1.3.26 Gráfica para el problema 47

48.

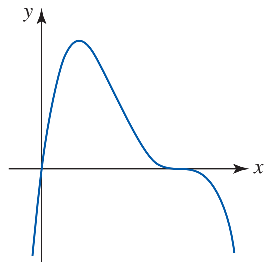


FIGURA 1.3.27 Gráfica para el problema 48

En los problemas 49-62, encuentre todas las asíntotas para la gráfica de la función racional dada. Encuentre las intersecciones x y y de la gráfica. Trace la gráfica de f.

49. $f(x) = \dfrac{4x - 9}{2x + 3}$

50. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

51. $f(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2}$

52. $f(x) = \dfrac{4}{(x + 2)^3}$

53. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

54. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$

55. $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2}$

56. $f(x) = \dfrac{x(x - 5)}{x^2 - 9}$

57. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x}$

58. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x}$

59. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 2}$

60. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 2}$

61. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1}$

62. $f(x) = \dfrac{-(x - 1)^2}{x + 2}$

63. Determine si los números -1 y 2 están en el rango de la función racional $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 4}$.

64. Determine los puntos donde la gráfica de $f(x) = \dfrac{(x - 3)^2}{x^2 - 5x}$ corta su asíntota horizontal.

☰ Modelos matemáticos

65. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y grados Fahrenheit T_F es lineal. Exprese T_F como una función de T_C si (0 °C, 32 °F) y (60 °C, 140 °F) están en la gráfica de T_F. Muestre que 100 °C es equivalente al punto de ebullición Fahrenheit 212 °F. Vea la FIGURA 1.3.28.

66. Temperaturas relacionadas La relación funcional entre grados Celsius T_C y unidades kelvin T_K es lineal. Exprese T_K como una función de T_C dado que (0 °C, 273 K) y (27 °C, 300 K) están en la gráfica de T_K. Exprese el punto de ebullición 100 °C en unidades kelvin. El cero absoluto se define como 0 K. ¿A qué es igual esto en grados Celsius? Exprese T_K como una función lineal de T_F. ¿A qué es igual 0 K en grados Fahrenheit? Vea la figura 1.3.28.

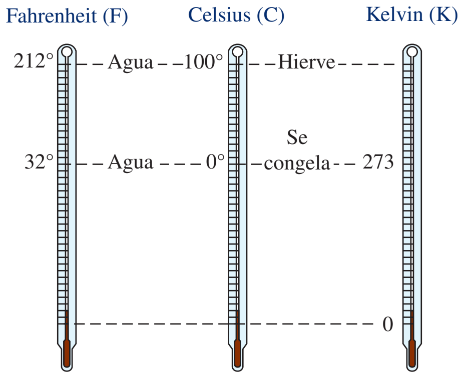


FIGURA 1.3.28 Termómetros para los problemas 65 y 66

67. Interés simple En interés simple la cantidad A devengada con el paso del tiempo es la función lineal $A = P + Prt$, donde P es el capital, t se mide en años y r es la tasa de interés anual (expresada como un decimal). Calcule A al cabo de 20 años si el capital es $P = 1\,000$ y la tasa de interés anual es 3.4%. ¿En qué instante se cumple que $A = 2\,200$?

68. Depreciación lineal La depreciación de línea recta, o depreciación lineal, consta de un artículo que pierde toda su utilidad inicial de A dólares a lo largo de un periodo de n años por una cantidad A/n anual. Si un artículo que cuesta $20 000 cuando está nuevo se deprecia linealmente a lo largo de 25 años, determine la función lineal que proporciona el valor V después de x años, donde $0 \le x \le 25$. ¿Cuál es el valor del artículo al cabo de 10 años?

69. Una pelota se lanza hacia arriba desde el nivel del piso con una velocidad inicial de 96 pies/s. La altura que alcanza la pelota con respecto al suelo está dada por la función cuadrática $s(t) = -16t^2 + 96t$. ¿En qué instante la pelota está en el suelo? Grafique s sobre el intervalo de tiempo para el cual $s(t) \ge 0$.

70. En el problema 69, ¿en qué instante la pelota está a 80 pies por arriba del piso? ¿Cuán alto asciende la pelota?

☰ Piense en ello

71. Considere la función lineal $f(x) = \frac{5}{2}x - 4$. Si x se cambia por 1 unidad, ¿cuántas unidades cambia y? ¿Si x se cambia por 2 unidades? ¿Si x se cambia por n unidades (n un entero positivo)?

72. Considere el intervalo $[x_1, x_2]$ y la función lineal $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Demuestre que

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

e interprete este resultado geométricamente para $a > 0$.

73. ¿Cómo encontraría una ecuación de la recta que es perpendicular a la bisectriz del segmento de recta que pasa por $\left(\frac{1}{2}, 10\right)$ y $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$?

74. Usando sólo los conceptos presentados en esta sección, ¿cómo demostraría o refutaría que el triángulo con vértices $(2, 3)$, $(-1, -3)$ y $(4, 2)$ es rectángulo?

1.4 Funciones trascendentes

Introducción En las dos primeras secciones de este capítulo analizamos varias propiedades y gráficas de **funciones algebraicas**. En las tres secciones siguientes estudiaremos las **funciones trascendentes**. Básicamente, una función trascendente f es una función que no es algebraica. Una función trascendente puede ser tan simple como la función potencia $y = x^n$, donde la potencia es un número irracional, pero las conocidas funciones trascendentes de precálculo en matemáticas son las funciones trigonométricas, las funciones trigonométricas inversas y las funciones exponencial y logarítmica. En esta sección se analizan las seis funciones trigonométricas y sus gráficas. En la sección 1.5 se considerarán las funciones trigonométricas inversas y en la sección 1.6, las funciones exponencial y logarítmica.

Para un repaso de las bases de la circunferencia unitaria y trigonometría de triángulos rectángulos, vea las *Páginas de recursos* al final del texto.

Gráficas del seno y coseno Recuerde de precálculo en matemáticas que las funciones trigonométricas seno y coseno tienen **periodo** 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \tag{1}$$

Se dice que la gráfica de *cualquier* función periódica sobre un intervalo de longitud igual a su periodo es un **ciclo** de su gráfica. La gráfica de una función periódica se obtiene fácilmente al trazar de manera repetida un ciclo de su gráfica. En la FIGURA 1.4.1 se muestra un ciclo de la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ (en rojo); la gráfica de f sobre, por ejemplo, el intervalo $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$ (en azul) es exactamente la misma que la gráfica sobre $[0, 2\pi]$. Debido a que $f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x = -f(x)$, la función seno es una función impar y su gráfica es simétrica con respecto al origen.

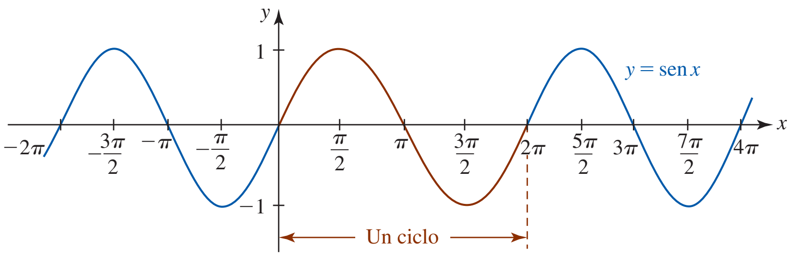


FIGURA 1.4.1 Gráfica de $y = \operatorname{sen} x$

La FIGURA 1.4.2 muestra un ciclo (en rojo) de $g(x) = \cos x$ sobre $[0, 2\pi]$ junto con la extensión de ese ciclo (en azul) hacia los intervalos adyacentes $[-2\pi, 0]$ y $[2\pi, 4\pi]$. En contraste con la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ donde $f(0) = f(2\pi) = 0$, para la función coseno se tiene $g(0) = g(2\pi) = 1$. La función coseno es una función par: $g(-x) = \cos(-x) = \cos x = g(x)$, de modo que en la figura 1.4.2 puede verse que su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

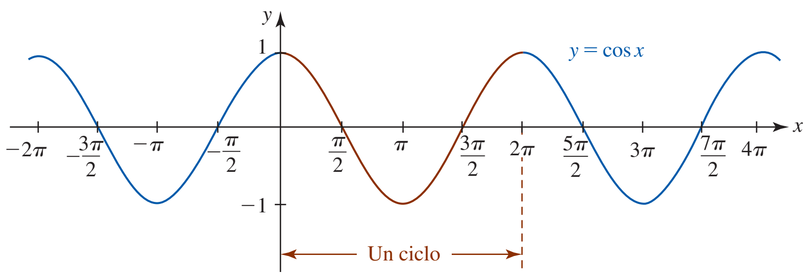


FIGURA 1.4.2 Gráfica de $y = \cos x$

Las funciones seno y coseno están definidas para todos los números reales x. También, resulta evidente en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 que

$$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1 \qquad \text{y} \qquad -1 \leq \cos x \leq 1, \tag{2}$$

o bien, de manera equivalente, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ y $|\cos x| \leq 1$. En otras palabras,

- el dominio de sen x y cos x es $(-\infty, \infty)$, y el rango de sen x y cos x es $[-1, 1]$.

Intersecciones En este curso y en cursos subsecuentes de matemáticas es importante conocer las coordenadas x de las intersecciones x de las gráficas seno y coseno; en otras palabras, los ceros de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$. A partir de la gráfica seno de la figura 1.4.1 observamos que los ceros de la función seno, o los números para los cuales $\text{sen } x = 0$, son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros de π. A partir de la gráfica coseno de la figura 1.4.2 notamos que $\cos x = 0$ cuando $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Estos números son múltiplos enteros impares de $\pi/2$.

Si n representa un entero, entonces $2n + 1$ es un entero impar. En consecuencia, los **ceros** de $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$ pueden escribirse en forma breve como:

- $\text{sen } x = 0$ para $x = n\pi$, n un entero, (3)
- $\cos x = 0$ para $x = (2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$, n un entero. (4)

Valores numéricos adicionales importantes de las funciones seno y coseno sobre el intervalo $[0, \pi]$ se proporcionan en la tabla siguiente.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\text{sen } x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

(5)

Usted debe poder discernir los valores $\text{sen } x$ y $\cos x$ sobre $[\pi, 2\pi]$ a partir de esta tabla usando el concepto de circunferencia unitaria y un ángulo de referencia. Por supuesto, fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ es posible determinar valores funcionales correspondientes usando periodicidad.

Otras funciones trigonométricas Cuatro funciones trigonométricas adicionales se definen en términos de cocientes o recíprocos de las funciones seno y coseno. La **tangente**, **cotangente**, **secante** y **cosecante** se definen, respectivamente, por

$$\tan x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\text{sen } x}, \tag{6}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\text{sen } x}. \tag{7}$$

El dominio de cada función en (6) y (7) es el conjunto de números reales excepto aquellos números para los cuales el denominador es cero. A partir de (4) se observa que

- el dominio de $\tan x$ y de $\sec x$ es $\{x \mid x \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

De manera semejante, a partir de (3) se concluye que

- el dominio de $\cot x$ y de $\csc x$ es $\{x \mid x \neq n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$.

Además, a partir de (2),

$$|\sec x| = \left|\frac{1}{\cos x}\right| = \frac{1}{|\cos x|} \geq 1 \tag{8}$$

y

$$|\csc x| = \left|\frac{1}{\text{sen } x}\right| = \frac{1}{|\text{sen } x|} \geq 1. \tag{9}$$

Recuerde que una desigualdad con valor absoluto como (8) significa $\sec x \geq 1$ o $\sec x \leq -1$. Por tanto, el rango de las funciones secante y cosecante es $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Las funciones tangente y cotangente tienen el mismo rango: $(-\infty, \infty)$. Al usar (5) pueden determinarse algunos valores numéricos de $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$. Por ejemplo,

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \frac{\text{sen}(2\pi/3)}{\cos(2\pi/3)} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3}.$$

Gráficas Los números que hacen cero los denominadores de tan x, cot x, sec x y csc x corresponden a asíntotas verticales de sus gráficas. En virtud de (4), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son $x = \pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \ldots$ Por otra parte, a partir de (3), las asíntotas verticales de las gráficas de $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ Estas asíntotas son las rectas discontinuas rojas en las FIGURAS 1.4.3–1.4.6.

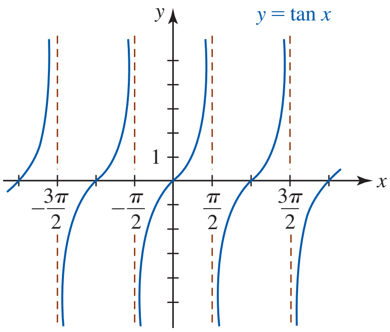


FIGURA 1.4.3 Gráfica de $y = \tan x$

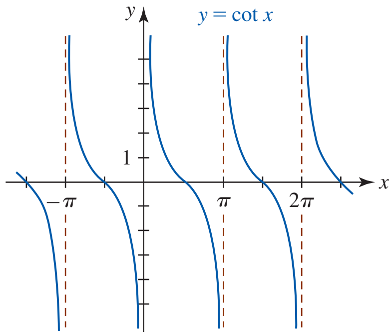


FIGURA 1.4.4 Gráfica de $y = \cot x$

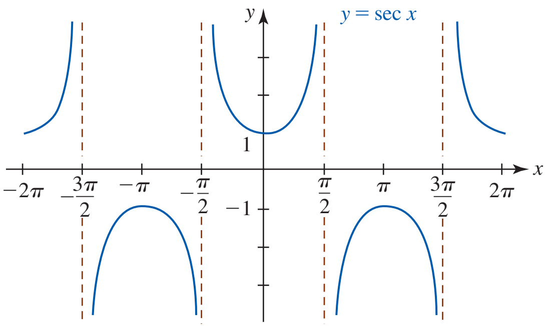


FIGURA 1.4.5 Gráfica de $y = \sec x$

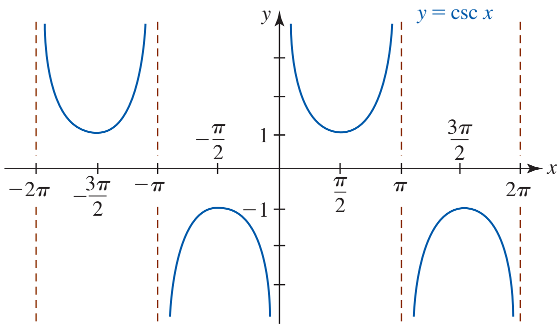


FIGURA 1.4.6 Gráfica de $y = \csc x$

Porque las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π, sec x y csc x también son periódicas con periodo 2π. Pero a partir de las figuras 1.4.3 y 1.4.4 debe resultar evidente que el periodo de las funciones tangente y cotangente es π:

$$\tan(x + \pi) = \tan x \qquad \text{y} \qquad \cot(x + \pi) = \cot x. \tag{10}$$

También, tan x, cot x y csc x son funciones impares; sec x es una función par.

Transformación y gráficas Es posible obtener variaciones de las gráficas de las funciones trigonométricas por medio de transformaciones rígidas y no rígidas. Gráficas de funciones de la forma

$$y = D + A\,\text{sen}(Bx + C) \qquad \text{o bien,} \qquad y = D + A\cos(Bx + C), \tag{11}$$

donde A, $B > 0$, C y D son constantes reales, representan desplazamientos, compresiones y estiramientos de las gráficas seno y coseno básicas. Por ejemplo,

desplazamiento vertical ↓ estiramiento/compresión/reflexión vertical ↓

$$y = D + A\,\text{sen}(Bx + C).$$

↑ estiramiento/compresión horizontal al cambiar el periodo ↑ desplazamiento horizontal

El número $|A|$ se denomina **amplitud** de las funciones o de sus gráficas. La amplitud de las funciones básicas $y = \text{sen}\, x$ y $y = \cos x$ es $|A| = 1$. El **periodo** de cada función en (11) es $2\pi/B$, $B > 0$, y la porción de la gráfica de cada función en (11) sobre el intervalo $[0, 2\pi/B]$ se denomina un **ciclo**.

EJEMPLO 1 Periodos

a) El periodo de $y = \text{sen } 2x$ es $2\pi/2 = \pi$, y en consecuencia un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Antes de determinar el periodo de $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$ primero es necesario que volvamos a escribir la función como $\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right) = -\text{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$ (el seno es una función impar). Ahora, el periodo es $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$, y por consiguiente un ciclo de la gráfica se completa en el intervalo $[0, 4\pi]$. ■

EJEMPLO 2 Gráficas de transformaciones verticales

Grafique

a) $y = -\dfrac{1}{2}\cos x$ ***b***) $y = 1 + 2 \text{ sen } x$.

Solución

a) La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida verticalmente por un factor de 2, y el signo menos indica que luego la gráfica es reflejada en el eje x. Con la identificación $A = -\frac{1}{2}$ se observa que la amplitud de la función es $|A| = |-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$. La gráfica de $y = -\frac{1}{2}\cos x$ sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ se muestra en rojo en la FIGURA 1.4.7.

b) La gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ es la gráfica de $y = \text{sen } x$ estirada verticalmente por un factor de 2. La amplitud de la gráfica es $|A| = |2| = 2$. La gráfica de $y = 1 + 2 \text{ sen } x$ es la gráfica de $y = 2 \text{ sen } x$ desplazada una unidad hacia arriba. Vea la FIGURA 1.4.8. ■

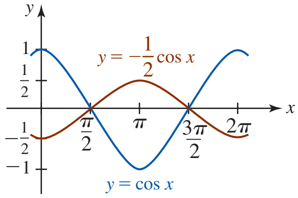


FIGURA 1.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 2*a*)

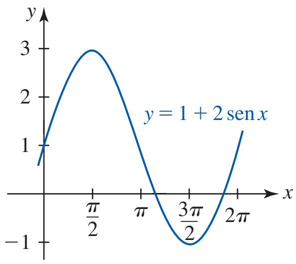


FIGURA 1.4.8 Gráfica de la función en el ejemplo 2*b*)

EJEMPLO 3 Gráfica coseno comprimida horizontalmente

Encuentre el periodo de $y = \cos 4x$ y grafique la función.

Solución Con la identificación de que $B = 4$, se ve que el periodo de $y = \cos 4x$ es $2\pi/4 = \pi/2$. Se concluye que la gráfica de $y = \cos 4x$ es la gráfica de $y = \cos x$ comprimida horizontalmente. Para graficar la función, se traza un ciclo de la gráfica coseno con amplitud 1 sobre el intervalo $[0, \pi/2]$ y luego se usa la periodicidad para extender la gráfica. La FIGURA 1.4.9 muestra cuatro ciclos completos de $y = \cos 4x$ (el ciclo básico en rojo y la gráfica extendida en azul) y un ciclo de $y = \cos x$ (mostrado en verde) sobre $[0, 2\pi]$. Observe que $y = \cos 4x$ alcanza su mínimo en $x = \pi/4$ puesto que $\cos 4(\pi/4) = \cos \pi = -1$ y su máximo en $x = \pi/2$ puesto que $\cos 4(\pi/2) = \cos 2\pi = 1$. ■

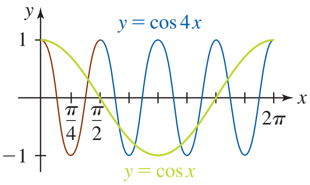


FIGURA 1.4.9 Gráfica de la función en el ejemplo 3

Por la sección 1.2 se sabe que la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ es la gráfica coseno básica desplazada hacia la derecha. En la FIGURA 1.4.10 la gráfica de $y = \cos(x - \pi/2)$ (en rojo) sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ es un ciclo de $y = \cos x$ sobre el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$ (en azul) desplazada horizontalmente $\pi/2$ unidades a la derecha. En forma semejante, las gráficas de $y = \text{sen}(x + \pi/2)$ y $y = \text{sen}(x - \pi/2)$ son las gráficas seno básicas desplazadas horizontalmente $\pi/2$ unidades a la izquierda y a la derecha, respectivamente. Vea la FIGURA 1.4.11 y la FIGURA 1.4.12.

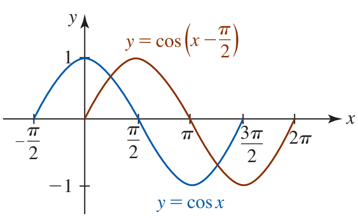


FIGURA 1.4.10 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

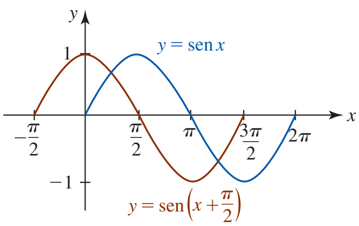


FIGURA 1.4.11 Gráfica seno desplazada horizontalmente

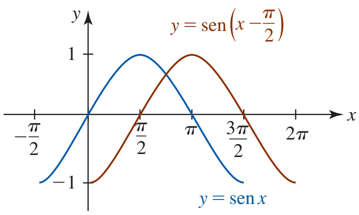


FIGURA 1.4.12 Gráfica seno desplazada horizontalmente

Al comparar las gráficas rojas en las figuras 1.4.10-1.4.12 con las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 se observa que

- la gráfica coseno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica seno,
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la izquierda es la gráfica coseno, y
- la gráfica seno desplazada $\pi/2$ unidades a la derecha es la gráfica coseno reflejada en el eje x.

En otras palabras, se han comprobado gráficamente las siguientes identidades

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \qquad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x. \tag{12}$$

Suponga que $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$. Entonces

$$f\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right) = A \operatorname{sen}(Bx + C). \tag{13}$$

El resultado en (13) muestra que la gráfica de $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ puede obtenerse al desplazar la gráfica de $f(x) = A \operatorname{sen} Bx$ horizontalmente una distancia $|C|/B$. Si $C < 0$, el desplazamiento es hacia la derecha, mientras que si $C > 0$, el desplazamiento es hacia la izquierda. El número $|C|/B$ se denomina **desplazamiento de fase** de las gráficas de las funciones en (3).

EJEMPLO 4 Gráfica coseno desplazada horizontalmente

La gráfica de $y = 10 \cos 4x$ está desplazada $\pi/12$ unidades a la derecha. Encuentre su ecuación.

Solución Al escribir $f(x) = 10 \cos 4x$ y usar (13) encontramos

$$f\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = 10 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{12}\right) \qquad \text{o bien,} \qquad y = 10 \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right).$$

En la última ecuación se identifica $C = -\pi/3$. El desplazamiento de fase es $\pi/12$. ■

Nota: Como cuestión práctica, el desplazamiento de fase para $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ o $y = A \cos(Bx + C)$ puede obtenerse al factorizar el número B a partir de $Bx + C$. Por ejemplo,

$$y = A \operatorname{sen}(Bx + C) = A \operatorname{sen} B\left(x + \frac{C}{B}\right).$$

EJEMPLO 5 Gráficas desplazadas horizontalmente

Grafique

a) $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ ***b)*** $y = 2\cos(\pi x + \pi)$.

Solución

a) Para efectos de comparación, primero graficaremos $y = 3 \operatorname{sen} 2x$. La amplitud de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ es $|A| = 3$ y su periodo es $2\pi/2 = \pi$. Así, un ciclo de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ se completa sobre el intervalo $[0, \pi]$. Luego, extendemos esta gráfica hacia al intervalo adyacente $[\pi, 2\pi]$ como se muestra en azul en la FIGURA 1.4.13. A continuación, volvemos a escribir $y = 3 \operatorname{sen}(2x - \pi/3)$ al factorizar 2 de $2x - \pi/3$:

$$y = 3 \operatorname{sen}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

A partir de la forma de la última expresión vemos que el desplazamiento de fase es $\pi/6$. La gráfica de la función dada, mostrada en rojo en la figura 1.4.13, se obtiene al desplazar la gráfica de $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ (en azul) $\pi/6$ unidades a la derecha.

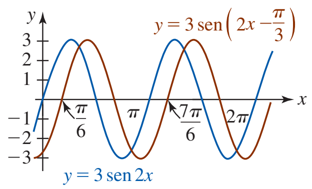


FIGURA 1.4.13 Gráfica de la función en el ejemplo 5*a*)

b) La amplitud de $y = 2\cos \pi x$ es $|A| = 2$ y el periodo es $2\pi/\pi = 2$. Así, un ciclo de $y = 2\cos \pi x$ se completa sobre el intervalo $[0, 2]$. En la FIGURA 1.4.14 se muestran (en azul) dos ciclos de la gráfica de $y = 2\cos \pi x$. Las intersecciones x de esta gráfica corresponden a los valores de x para los que $\cos \pi x = 0$. Por (4), esto implica $\pi x = (2n + 1)\pi/2$ o $x = (2n + 1)/2$, con n un entero. En otras palabras, para $n = 0, -1, 1, -2, 2, -3, \ldots$ obtenemos $x = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}$, y así sucesivamente. Luego, al volver a escribir la función dada como

$$y = 2\cos \pi(x + 1)$$

observamos que el desplazamiento de fase es 1. La gráfica de $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ mostrada en rojo en la figura 1.4.14 se obtiene al desplazar 1 unidad a la izquierda la gráfica de $y = 2\cos \pi x$ (en azul). Esto significa que las intersecciones x son las mismas para ambas gráficas. ■

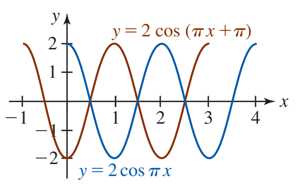


FIGURA 1.4.14 Gráfica de la función en el ejemplo 5*b*)

En matemáticas aplicadas, las funciones trigonométricas sirven como modelos matemáticos para muchos fenómenos periódicos.

EJEMPLO 6 Corriente alterna

Un modelo matemático para la corriente I (en amperes) en un alambre de un circuito de corriente alterna está dado por $I(t) = 30 \text{ sen } 120\pi t$, donde t es el tiempo medido en segundos. Trace un ciclo de la gráfica. ¿Cuál es el valor máximo de la corriente?

Solución La gráfica tiene una amplitud 30 y periodo $2\pi/120\pi = \frac{1}{60}$. En consecuencia, trazamos un ciclo de la curva seno básica sobre el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$, como se muestra en la FIGURA 1.4.15. A partir de la figura, resulta evidente que el valor máximo de la corriente es $I = 30$ amperes y ocurre en el intervalo $[0, \frac{1}{60}]$ en $t = \frac{1}{240}$ puesto que

$$I\left(\frac{1}{240}\right) = 30\,\text{sen}\left(120\pi \cdot \frac{1}{240}\right) = 30\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2} = 30. \quad \blacksquare$$

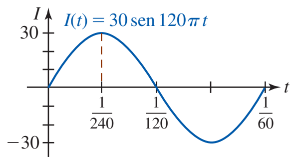


FIGURA 1.4.15 La gráfica de la corriente en el ejemplo 6, muestra que hay 60 ciclos en un segundo

Para referencia futura Las identidades trigonométricas se usan en todo el cálculo, especialmente en el estudio del cálculo integral. Para facilitar las referencias, a continuación se enumeran algunas identidades que revisten particular importancia.

Identidades pitagóricas

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{14}$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \tag{15}$$

$$1 + \cot^2 x = \csc^2 x \tag{16}$$

Fórmulas de suma y diferencia

$$\text{sen}(x_1 \pm x_2) = \text{sen}\,x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1\,\text{sen}\,x_2 \tag{17}$$

$$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \text{sen}\,x_1\,\text{sen}\,x_2 \tag{18}$$

Fórmulas para el doble de un ángulo

$$\text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\cos x \tag{19}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x \tag{20}$$

Fórmulas para la mitad de un ángulo

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x) \tag{21}$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x) \tag{22}$$

Identidades adicionales pueden encontrarse en las *Páginas de recursos* al final de este texto.

Ejercicios 1.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-5.

Fundamentos

En los problemas 1-6, use técnicas de desplazamiento, estiramiento, compresión y reflexión para dibujar por lo menos un ciclo de la gráfica de la función dada.

1. $y = \frac{1}{2} + \cos x$

2. $y = -1 + \cos x$

3. $y = 2 - \text{sen}\,x$

4. $y = 3 + 3\,\text{sen}\,x$

5. $y = -2 + 4\cos x$

6. $y = 1 - 2\,\text{sen}\,x$

En los problemas 7-14, encuentre la amplitud y el periodo de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

7. $y = 4\,\text{sen}\,\pi x$

8. $y = -5\,\text{sen}\,\frac{x}{2}$

9. $y = -3\cos 2\pi x$

10. $y = \frac{5}{2}\cos 4x$

11. $y = 2 - 4\,\text{sen}\,x$

12. $y = 2 - 2\,\text{sen}\,\pi x$

13. $y = 1 + \cos\frac{2x}{3}$

14. $y = -1 + \text{sen}\,\frac{\pi x}{2}$

En los problemas 15-18, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y D y escriba una ecuación de la forma $y = D + A$ sen x o $y = D + A \cos x$ para la gráfica.

15.

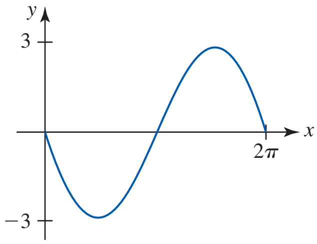


FIGURA 1.4.16 Gráfica para el problema 15

16.

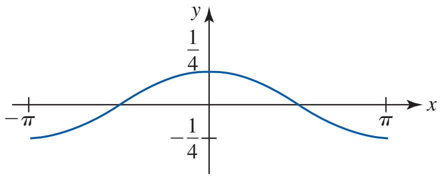


FIGURA 1.4.17 Gráfica para el problema 16

17.

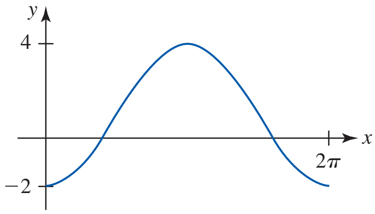


FIGURA 1.4.18 Gráfica para el problema 17

18.

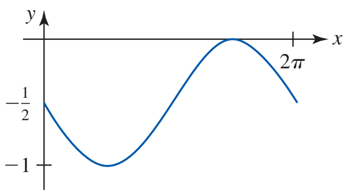


FIGURA 1.4.19 Gráfica para el problema 18

En los problemas 19-24, la figura dada muestra un ciclo de una gráfica seno o coseno. A partir de la figura, determine A y B y escriba una ecuación de la forma $y = A$ sen Bx o $y = A \cos Bx$ para la gráfica.

19.

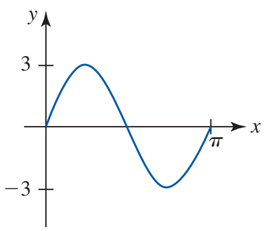


FIGURA 1.4.20 Gráfica para el problema 19

20.

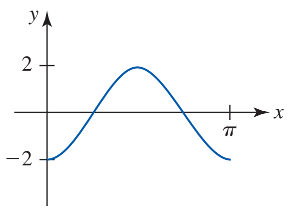


FIGURA 1.4.21 Gráfica para el problema 20

21.

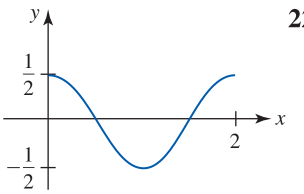


FIGURA 1.4.22 Gráfica para el problema 21

22.

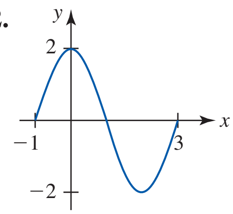


FIGURA 1.4.23 Gráfica para el problema 22

23.

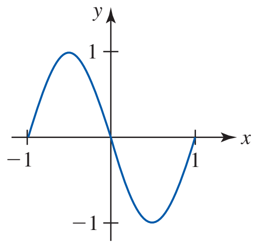


FIGURA 1.4.24 Gráfica para el problema 23

24.

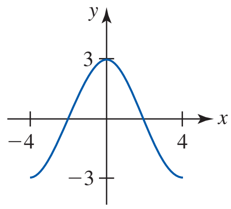


FIGURA 1.4.25 Gráfica para el problema 24

En los problemas 25-34, encuentre la amplitud, el periodo y el desplazamiento de fase de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

25. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$ **26.** $y = \operatorname{sen}\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

27. $y = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ **28.** $y = -2\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

29. $y = 4\cos\left(2x - \dfrac{3\pi}{2}\right)$ **30.** $y = 3\operatorname{sen}\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$

31. $y = 3\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **32.** $y = -\cos\left(\dfrac{x}{2} - \pi\right)$

33. $y = -4\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{3}x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ **34.** $y = 2\cos\left(-2\pi x - \dfrac{4\pi}{3}\right)$

En los problemas 35 y 36, escriba una ecuación de la función cuya gráfica se describe con palabras.

35. La gráfica de $y = \operatorname{sen} \pi x$ está estirada verticalmente hacia arriba por un factor de 5 y está desplazada $\frac{1}{2}$ unidad hacia la derecha.

36. La gráfica de $y = 4\cos\dfrac{x}{2}$ está desplazada 8 unidades hacia abajo y está desplazada $2\pi/3$ unidades hacia la izquierda.

En los problemas 37 y 38, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. Luego, use periodicidad para encontrar todas las intersecciones.

37. $y = -1 + \operatorname{sen} x$ **38.** $y = 1 - 2\cos x$

En los problemas 39-44, encuentre las intersecciones x de la gráfica de la función dada. No grafique.

39. $y = \operatorname{sen} \pi x$ **40.** $y = -\cos 2x$

41. $y = 10\cos\dfrac{x}{2}$ **42.** $y = 3\operatorname{sen}(-5x)$

43. $y = \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **44.** $y = \cos(2x - \pi)$

En los problemas 45-52, encuentre el periodo, las intersecciones x y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

45. $y = \tan \pi x$ **46.** $y = \tan\dfrac{x}{2}$

47. $y = \cot 2x$ **48.** $y = -\cot\dfrac{\pi x}{3}$

49. $y = \tan\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$ **50.** $y = \dfrac{1}{4}\cot\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

51. $y = -1 + \cot \pi x$ **52.** $y = \tan\left(x + \dfrac{5\pi}{6}\right)$

En los problemas 53-56, encuentre el periodo y las asíntotas verticales de la función dada. Trace por lo menos un ciclo de la gráfica.

53. $y = 3\csc \pi x$

54. $y = -2\csc \frac{x}{3}$

55. $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

56. $y = \csc(4x + \pi)$

☰ Modelos matemáticos

57. Profundidad del agua La profundidad del agua d a la entrada de un puerto pequeño en el instante t es modelada por una función de la forma

$$d(t) = D + A\,\mathrm{sen}\,B\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

donde A es la mitad de la diferencia entre las profundidades de la marea alta y la marea baja, $2\pi/B$, $B > 0$ es el periodo de mareas y D es la profundidad media. Suponga que el periodo de mareas es 12 horas, la profundidad media en la marea alta es 18 pies y que la profundidad en la marea baja es 6 pies. Dibuje dos ciclos de la gráfica de d.

58. Temperatura Fahrenheit Suponga que

$$T(t) = 50 + 10\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}(t - 8), \quad 0 \le t \le 24$$

es un modelo matemático de la temperatura Fahrenheit a las t horas después de medianoche durante un cierto día de la semana.

a) ¿Cuál es la temperatura a las 8 a.m.?
b) ¿A qué hora(s) se cumple $T(t) = 60$?
c) Trace la gráfica de T.
d) Encuentre las temperaturas máxima y mínima, así como las horas a que ocurren.

☰ Problemas con calculadora/SAC

59. Aceleración debida a la gravedad Debido al movimiento de rotación de la Tierra, la forma de ésta no es esférica, sino que se elonga en el ecuador y se achata en los polos. Como resultado, la aceleración debida a la gravedad no es la constante 980 cm/s^2, sino que varía con la latitud θ. Estudios satelitales han sugerido que la aceleración debida a la gravedad g es aproximada por el modelo matemático

$$g = 978.0309 + 5.18552\,\mathrm{sen}^2\theta - 0.00570\,\mathrm{sen}^2 2\theta.$$

Encuentre g

a) en el ecuador ($\theta = 0°$),
b) en el polo norte y
c) a 45° latitud norte.

60. Lanzamiento de bala El alcance de una bala soltada desde una altura h por arriba del nivel del piso con una velocidad inicial v_0 a un ángulo ϕ con respecto a la horizontal puede aproximarse por el modelo matemático

$$R = \frac{v_0\cos\phi}{g}\left[v_0\,\mathrm{sen}\,\phi + \sqrt{v_0^2\,\mathrm{sen}^2\phi + 2gh}\right],$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad. Vea la FIGURA 1.4.26.

a) Si $v_0 = 13.7$ m/s, $\phi = 40°$ y $g = 9.8$ m/s^2, compare los alcances que se obtienen para las alturas $h = 2.0$ m y $h = 2.4$ m.
b) Explique por qué un incremento en h produce un incremento en el alcance R si los otros parámetros se mantienen fijos.
c) ¿Qué implica lo anterior respecto a la ventaja que la altura otorga a un lanzador de bala?

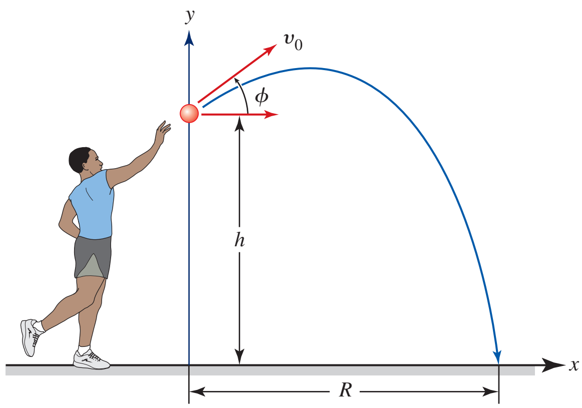


FIGURA 1.4.26 Proyectil en el problema 60

☰ Piense en ello

61. La función $f(x) = \mathrm{sen}\,\frac{1}{2}x + \mathrm{sen}\,2x$ es periódica. ¿Cuál es el periodo de f?

62. Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\mathrm{sen}\,x|$ y $y = |\cos x|$.

63. Analice y luego dibuje las gráficas de $y = |\sec x|$ y $y = |\csc x|$.

64. ¿Es posible que la solución de la ecuación dada sea un número real?

a) $9\csc x = 1$
b) $7 + 10\sec x = 0$
c) $\sec x = -10.5$

En los problemas 65 y 66, use las gráficas de $y = \tan x$ y $y = \sec x$ para encontrar números A y C para los que se cumpla la igualdad dada.

65. $\cot x = A\tan(x + C)$

66. $\csc x = A\sec(x + C)$

1.5 Funciones inversas

❚ Introducción En la sección 1.1 vimos que una función f es una regla de correspondencia que a cada valor x en su dominio X asigna un solo valor o un valor único y en su rango. Esta regla no excluye el hecho de que el mismo número y se asocie con varios valores *diferentes* de x. Por ejemplo, para $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, el valor $y = 4$ en el rango de f ocurre en $x = 0$ o en $x = 2$ en el