7. EXPONENCIALES Y LOGARITMOS

En esta Unidad estudiaremos y analizaremos las **funciones y ecuaciones exponenciales y logarítmicas.** Comenzaremos con las funciones exponenciales para luego continuar con ecuaciones exponenciales. La necesidad de resolver ecuaciones exponenciales trae consigo hallar la función inversa de la función exponencial y es donde toma sentido la función logaritmo. Repasaremos algunas propiedades de los logaritmos para centrarnos en resolver ecuaciones logarítmicas y situaciones problemáticas donde se encuentren involucradas ecuaciones tanto exponenciales como logarítmicas.

Comencemos con la siguiente situación.

La esperanza de vida, aún en los países poco desarrollados, creció después de la Segunda Guerra Mundial aunque a distinto ritmo. Este crecimiento, si bien al principio trajo mayor actividad y progreso, a la larga ha producido graves problemas: falta de viviendas, escuelas, puestos de trabajo.... El aumento de la población por la prolongación de la vida se ha visto compensado en parte por el descenso de la natalidad en los países industrializados. De todos modos, ha aparecido el problema del envejecimiento de la población (es decir el aumento de la edad promedio).

Analizaremos ahora algún modelo matemático que trata de describir la evolución de una población.

En Europa occidental, durante los siglos XVII y XVIII, comenzó a descender el índice de mortalidad, y el incremento poblacional en muchos países se situó entre 0.5 y 1% anual. Para evitar complicaciones con los cálculos consideraremos que el crecimiento poblacional fue del 1% anual durante los primeros 20 años de este siglo.

Supongamos que la cantidad de población europea al comienzo del siglo XVII (año 1.600) sea 10 (en cientos de millones). La función P(t) medirá la cantidad de población en el tiempo t. Como comenzaremos nuestro estudio a partir del año 1.600 este será el tiempo inicial, es decir, $t = 0$.

Año	Tiempo **t** (años)	Población (en cientos de millones)
1600	$t = 0$	$P(0) = 10$
1601	$t = 1$	$P(1) = 10 + 1\%$ de 10 $= 10 + \frac{1}{100}.10$ $= 10{,}1$
1602	$t = 2$	$P(2) = 10{,}1 + 1\%$ de $10{,}1$ $= 10{,}1 + 0{,}01.\ 10{,}1$ $= 10{,}201$
1603	$t = 3$	$P(3) = ...$
...	...	...

¿Podemos hallar una fórmula que nos permita calcular la población para cualquier valor de t *? Para ello analizaremos lo que hemos hecho hasta el momento en cada paso:*

en $\boldsymbol{t} = 0$, $P(0) = 10$
en $\boldsymbol{t} = 1$, $P(1) = 10 + 0{,}01.10 = 10\,(1 + 0{,}01) = 10\,.1{,}01 = P(0)\,.\,1{,}01$

en $\boldsymbol{t} = 2$, $P(2) = P(1) + 0{,}01.\,P(1) = 10.\,1{,}01 + 0{,}01.\,10.\,1{,}01 =$

$$10.\,1{,}01\,(1 + 0{,}01) = 10.\,1{,}01.\,1{,}01 = 10\,(1.01)^2$$

¿Podrás realizar el caso $t = 3$? (Ten en cuenta los pasos hechos en los casos $t = 1$ y $t = 2$)

*En general, la población después de **t** períodos será:*

$$P(t) = 10\,(1.01)^t$$

donde 10 *es la población inicial* $P(0)$. *Verifiquemos que la fórmula obtenida nos da, por ejemplo para* $t = 2$, $P(2) = 10\,.\,1{,}01^2 = 10{,}201$ *que coincide con el valor de la tabla. Si queremos estimar la población en el año* 1610, *será* $P(10) = 10.\,1{,}01^{10} = 11046$.

Observemos que...

en la fórmula $P(t) = 10\,(1{,}01)^t$, el factor 10 es la población inicial y la variable $\boldsymbol{t}$ figura en el exponente. A este tipo de funciones se las llama **exponenciales.**

7.1 Función Exponencial

Desde "ejemplos" hasta la aparición de la definición, lo pondría como texto habitual, dado que son comentarios no vinculados a la enunciación de definiciones, leyes, etc. Esto, a los efectos de ver la coherencia gráfica.

Ejemplos:

Hasta ahora hemos estudiado potencias pertenecientes a distintos campos numéricos:

- potencias de exponente natural
  $$a^n = \underbrace{a\,.\,a\,.\,a\,....\,a}_{n \text{ veces}} \qquad n \in \mathbb{N},$$
- potencias de exponente nulo
  $$a^0 = 1 \quad (a \neq 0),$$
- potencias de exponente entero negativo
  $$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad n \in \mathbb{N}\ ,\ (a \neq 0),$$
- potencias de exponente fraccionario
  $$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

- $4^{-3} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$
- $2^{5/2} = \sqrt{2^5}$
- $5^2.5^4 = 5^6 \qquad (3^2)^3 = 3^6$

y conocemos sus propiedades básicas:

$$a^n\,.\,a^m = a^{n+m} \qquad\qquad a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n.m} \qquad n\,,\,m \in \mathbb{Q}.$$

Las propiedades antes mencionadas se extienden para el caso en que n y m son números reales cualesquiera

También es posible dar sentido a expresiones tales como 2^{π} , $3^{\sqrt{2}}$ y estimar su valor a partir de una aproximación del exponente irracional.

Con estos elementos, podemos definir la función exponencial .

Función exponencial

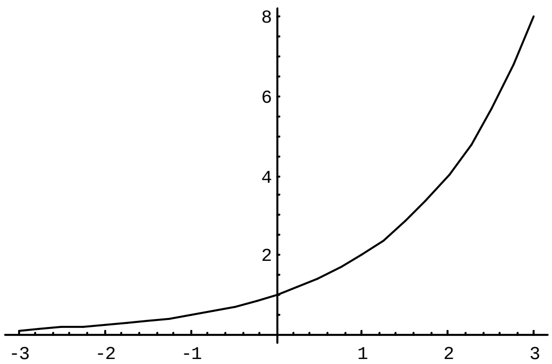
Dado $a > 0$, llamamos *función exponencial* de base a a la función f : R ® R definida por $f(x) = a^x$.

El comportamiento de la función exponencial es muy distinto según sea $a > 1$, $a < 1$, $a = 1$.

Ejemplo:

Analicemos la gráfica de la función exponencial de acuerdo al valor de a.

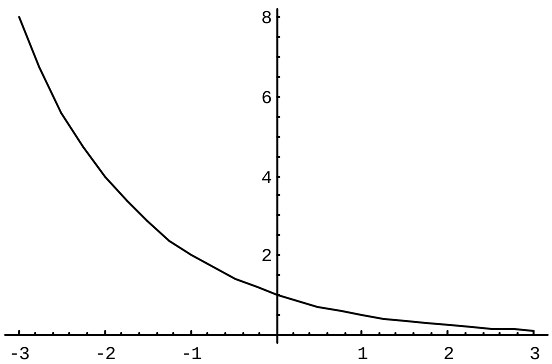
a) Si $a > 1$, por ejemplo $a = 2$, la función $y = 2^x$ es creciente .



Observemos que...

cualquiera sea el valor de $a > 0$, la gráfica de la función exponencial debe pasar por el punto (0,1), ya que es el valor de la ordenada al origen; es decir el valor que toma la función para $x = 0$. Por otro lado es claro que a medida que el valor de x aumenta, el valor de a^x también, y si el valor de x decrece (con valores negativos) entonces el valor de a^x tiende a 0.

b) Si $0 < a < 1$, por ejemplo $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ la función es decreciente.



Observemos que...

nuevamente cualquiera sea el valor de $0 < a < 1$, la gráfica de la función pasa por el punto (0,1).

Por otro lado, a medida que el valor de x aumenta, el valor de a^x decrece.

La siguiente tabla de valores nos permite hacer un estudio comparativo de las funciones $y = 2^x$ e $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2^x}$
0	1	1
1	2	$\frac{1}{2}$
2	4	$\frac{1}{4}$
3	8	$\frac{1}{8}$
-1	$2^{-1} = \frac{1}{2}$	2
-2	$\frac{1}{4}$	4
-3	$\frac{1}{8}$	8
...	...	...

La gráfica de la función pasa por el punto (0,1).
Si los valores de x son positivos, entonces $-x$ es negativo.
Si $x > 0$, entonces 5^{-x} es decreciente.
Si $x < 0$, se tiene $-x$ positivo y a medida que los valores de $-x$ aumentan, 5^{-x} decrece.

c) $y = 5^{-x}$

¿Cuál es la gráfica de esta función?

Para pensar....

¿Qué pasa cuando $a = 1$?

La función exponencial aparece con frecuencia en modelos matemáticos de diferentes procesos evolutivos. Por ejemplo, las amebas son seres unicelulares que se reproducen dividiéndose en dos. Supongamos que las condiciones de un cultivo son tales que las amebas se duplican aproximadamente cada hora, y que inicialmente solo hay una ameba. Proponemos calcular el número de amebas que habrá según pasan las horas:

Tiempo (hs)	1	2	3	4	5	6	7	... x
Nro. de amebas	2	4	8					... 2^x

Observemos que...

si en el momento inicial hay k amebas, y en la primer hora se duplican, entonces ahora hay $2k$. En la segunda hora se vuelven a duplicar, es decir, $2\,(2k) = 2^2\,k$, en la tercer hora se repite la situación y tenemos $2(2^2\,k) = 2^3 k$, etc. Luego en general se tiene $2^x k$.

El número total al cabo de x horas será

$$y = 2^x$$

Si al comienzo del proceso había k amebas, el número total sería:

$$y = k\,2^x$$

Observemos que...

en esta última igualdad, la variable independiente x aparece como exponente.

¿Qué pasa si ahora queremos hallar el tiempo x en el cual el número de amebas existente "y" es conocida? En la sección siguiente estudiaremos este tipo de ecuaciones resultante.

7.1.1 Ecuaciones Exponenciales

Ecuación exponencial

A una ecuación en la que la incógnita aparece en un exponente se la llama *ecuación exponencial*.

Observemos que...

estamos teniendo en cuenta que si las bases son las mismas en una igualdad, entonces los exponentes deben ser iguales.

a) $5^{3-x} = 125$

Observemos que...

$5^{3-x} = 5^3$, entonces $3 - x = 3$,

luego $x = 0$

b) $3^{1-x^2} = \dfrac{1}{27}$

Recordemos que $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$$3^{1-x^2} = \frac{1}{3^3} = 3^{-3}$$

$$1 - x^2 = -3$$

$$x^2 = 4$$

Aquí utilizamos la definición de valor absoluto.

$|x| = \sqrt{4} = 2$ entonces

$x_1 = 2, \qquad x_2 = -2$

Actividades de Aprendizaje

1) Graficar:

a) $y = 3^x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y = 3.\ 2^x$

d) $y = 3^x - 2$ e) $y = -\ 3^x$ f) $y = -\ \frac{1}{2} . 3^x$

2) Las sustancias radiactivas se desintegran emitiendo radiaciones y transformándose en otras sustancias.

Sustancia radiactiva → radiaciones + otra sustancia.

Este proceso se realiza con el paso del tiempo y a un ritmo que varía según el tipo de sustancia.
La rapidez con que se desintegra una sustancia radiactiva se mide mediante su "período de desintegración", que es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la masa inicial; algunos ejemplos son:

uranio:	2500	millones de años
radio:	1620	años
actinio:	28	años
talio:	3	minutos

Si tenemos una masa inicial de un gramo y el período de desintegración es un año, averiguar qué cantidad de sustancia radiactiva queda al cabo de:

Tiempo (años)	1	2	3	4	5	6	7	...
grs. de sustancia								...

¿Cuál es la función que representa este proceso?. Graficar.

3) Encontrar el valor de x que verifica:

a) $\frac{4^{x+1}}{2^{x+2}} = 128$ b) $2^{3x} = 0{,}5^{3x+2}$

4) La población de una ciudad se triplica cada 50 años. En el tiempo $t = 0$, esta población es de 100.000 habitantes. Dar una fórmula para la población $P(t)$ como función del tiempo t. ¿Cuál es la población después de

a) 100 años? b) 150 años? c) 200 años?

5) Las bacterias en una solución se duplican cada 3 minutos. Si hay 10^4 bacterias al comienzo, dar una fórmula para el número de bacterias en el tiempo t. ¿Cuántas bacterias hay después de

a) 3 minutos? b) 27 minutos? c) 1 hora?

6) Un elemento radiactivo que decae en su crecimiento $f(t)$ después de un tiempo t satisface la fórmula $f(t) = 60 \cdot 2^{-0{,}02\, t}$.

a) ¿Cuál es la cantidad de este elemento al inicio del proceso?
b) ¿Qué cantidad queda después de 500 años?
c) ¿Qué cantidad queda después de 1000 años?
d) ¿Qué cantidad queda después de 2000 años?.

7.2 Función Logarítmica - Logaritmos

Supongamos que un determinado bien material que hoy cuesta $150 se devalúa con el uso, cada año, un 4% de su valor durante el año anterior. Por ejemplo:

*En **t** = 0 (inicio) el valor en 0* *V(0) = 150*
*En **t** = 1 (1 año después)* *V(1) = 150 – 4% de 150 = 144*
*En **t** = 2 (2 años después)* *V(2) = 144 – 4% de 144 = 138,24*
*En **t** = 3 .....*

En general, una fórmula que representa esta situación, puede obtenerse como en el ejemplo inicial de la unidad:

$$V(t) = 150. (096)^{t}$$

Supongamos ahora, que queremos saber luego de cuántos años de uso el valor del bien se redujo aproximadamente a $92.

Para esto necesitamos resolver la siguiente ecuación

$$92 = 150\,(0{,}96)^{t}$$

¿Cómo despejar t de esta fórmula?

Observemos que...

el valor de ***t*** que estamos buscando es tal que
elevando el número 0,96 a ese valor da por resultado $\frac{92}{150}$.

Ahora queremos resolver otros tipos de ecuaciones. Por ejemplo, *resolvamos la ecuación $10^{1-x} = 30$. Veamos qué secuencia de pasos desarrollamos:*

Descomponemos el número 30 en sus factores primos.

$$10^{1-x} = 3 \cdot 2 \cdot 5$$

Observemos que...

no podemos expresar al segundo miembro como potencia de 10, lo que nos permitiría resolver la ecuación de manera similar a la sección anterior.

Nuestra pregunta es: ¿cómo podemos resolver ecuaciones del tipo $10^x = k$?, ó en general ¿ $a^x = k$?.
Podemos hacerlo si conocemos la función inversa de $y = 10^x$

Función logarítmica

A esta nueva función se la llama *función logarítmica en base 10* y se denota $y = log_{10}\, x$ ó también, $y = log\, x$.

$10^x = 100$ entonces $x = log_{10}100 = 2$ pues $10^2 = 100$

Si $3 = \log_{10} 1000$ entonces $10^3 = 1000$

$10^x = 1/100$ entonces $x = \log_{10} 100^{-1} = -2$ pues $10^{-2} = 100^{-1}$.

Ahora, podemos decir que,

si $10^x = k$ entonces $x = log_{10}\, k$

es decir, el logaritmo de un número en base 10 es el exponente al que hay que elevar la base 10 para obtener dicho número.

Generalizando:

Logaritmo en base a

Sea $a > 0$ y $a \neq 1$, e $y > 0$, llamaremos *logaritmo en base a de y* al único número x que verifica $a^x = y$. Es decir,

$$log_a\, y = x \Leftrightarrow a^x = y \quad .$$

Ejemplo:

Interpretemos la definición de logaritmo:

a) $2^7 = 128$

$2^7 = 128 \Leftrightarrow log_2\, 128 = 7$

b) $8^{1/3} = 2$

$8^{1/3} = 2 \Leftrightarrow log_8\, 2 = \frac{1}{3}$

***Ejemplo*:**

Calculemos

a) $log_2\, 16$

$log_2\, 16 = y \Leftrightarrow 2^y = 16 = 2^4 \Leftrightarrow y = 4$

b) $log_2\, 32$

$log_2\, 32 = y \Leftrightarrow 2^y = 32 = 2^5 \Leftrightarrow y = 5$

Ejemplo:

El símbolo $\cong$ significa *aproximadamente*.
Consulta el manual de tu calculadora para verificar que $log_{10}\ 30$ *es aproximadamente* 1,47712.

Ahora estamos en condiciones de resolver la siguiente ecuación.

$$10^{1-x} = 30$$

$$10^{1-x} = 30 \iff 1 - x = log_{10}\ 30 \cong 1{,}47712$$

$$\text{luego} \quad x \cong -0{,}47712$$

7.2.1 Propiedades de los Logaritmos

Recordemos algunas propiedades de los logaritmos:

$log_2\ (4.8) = log_2\ 32 = 5$

y $log_2\ 4 + log_2\ 8 = 2 + 3 = 5$

1.- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores

$$log_a\ (x\ .\ y) = log_a\ x + log_a\ y$$

$log_2\ 4^3 = log_2\ 64 = 6$ pues $2^6 = 64$
y $3\ log_2\ 4 = 3.2 = 6$

2.- El logaritmo de una potencia es igual al exponente por el logaritmo de la base

$$log_a\ (x^y) = y\ .\ log_a\ x$$

A partir de estas dos propiedades se pueden deducir las siguientes:

$log_3\ 81/9 = log_3\ 9 = 2$

y por otro lado

$log_3 81 - log_3\ 9 = 4 - 2 = 2.$

3.- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a\ x - log_a\ y$$

Observar que $log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a \left(x\,.\,\frac{1}{y}\right) = \log_a x + \log_a y^{-1}$

$$= log_a\ x - log_a\ y$$

$log_3 \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$

pues $3^{-1} = \frac{1}{3}$ 1/3.

Por otro lado tenemos

$\frac{1}{4} \log_3 \frac{1}{81} = \frac{1}{4}.(-4) = -1.$

4.- El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido por el índice de la raíz.

$$log_a \sqrt[y]{x} = \frac{1}{y}\ log_a\ x = \frac{log_a\ x}{y}$$

Observar que $\quad log_a \sqrt[y]{x} = log_a\ (x^{1/y}) = \frac{1}{y}\ log_a\ x$

Para pensar ...

El logaritmo de la base es siempre 1
$log_a\, a = 1$ ¿por qué?

El logaritmo de 1 es 0 en cualquier base
$log_a\, 1 = 0$ ¿por qué?

7.2.2 Cambio de base

Las calculadoras científicas permiten solamente obtener logaritmos decimales y neperianos.

Logaritmo decimal	**Los *logaritmos decimales* son los logaritmos de base 10, y se acostumbra denotar** $log_{10}\, x = log\, x$ **omitiendo la base.**
Logaritmo neperiano	**El *logaritmo neperiano o natural* es el logaritmo cuya base es el número *e* @ 2,7182 y se denota** $log_e\, x = ln\, x$ **.**

Si queremos calcular logaritmos en otra base, es conveniente realizar cambios de base.

Si, por ejemplo, tuviéramos que calcular **$log_2\, 3$:**

Llamamos x al logaritmo que queremos calcular. Luego, aplicamos logaritmo decimal a ambos miembros y obtenemos

$$x = log_2\, 3$$

$$x\, log\, 2 = log\, 3,$$

finalmente, $x = \dfrac{log\, 3}{log\, 2} \cong 1{,}5849$.

El procedimiento general es:

$$y = log_a\, x$$

$$a^y = x$$

$$y\, log_b\, a = log_b\, x$$

$$y = \frac{log_b\, x}{log_b\, a}$$

Actividades de Aprendizaje

7) Calcular a) $log_2\ 4^{81}$ b) $log_3\ \sqrt[15]{27}$.

8) Hallar el valor de x.

a) $log_7\ x = 2$

b) $log_a\ x = 0$

c) $log_8\ x = \frac{1}{3}$

d) $log_2\ 64 = x$

e) $log_{49}\ \sqrt{7} = x$

f) $log_8\ \sqrt[4]{2} = x$

g) $log_x\ 10 = \frac{1}{4}$

h) $log_x\ 0{,}000001 = -6$

9) Mostrar con un ejemplo que en general,

a) $log_a\ (x + y) \neq log_a\ x + log_a\ y$

b) $log_a\ (x - y) \neq log_a\ x - log_a\ y$.

10) Resolver aplicando la definición de logaritmo.

a) $log_5\ 25 + log_2\ \frac{1}{4}$ b) $log\ 1000 - \frac{1}{3}\ log_{1/2}\ 1$

c) $log_{\frac{2}{7}}\ 49 - log_2\ 16$

d) $log_2\ \sqrt{2} + log_3\ \sqrt[3]{3^4} - log\ 0{,}001$

e) $log_3\ 27 + log_{1/2}\ 4 - 2\ log_{1/3}\ \frac{1}{9}$

11) Sabiendo que $log_2\ 5 \cong 2{,}3$ calcular, aplicando las propiedades del logaritmo.

a) $log_2\ 10$ b) $log_2\ 2{,}5$ c) $log_2\ \sqrt{5}$ d) $log_2\ 25$.

12) Averiguar el valor numérico de las siguientes expresiones:

a) $log_a\ (a^2\ \sqrt{a}\ )$

b) $log_a\ 1$

c) $\log_x \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

d) $log_2\ \sqrt[3]{64}$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{64}$

f) $2^{\log_a a^2}$

g) $10^{\log_a \sqrt{a}}$

h) $10^{\log_a (\sqrt{a}\, a^3)}$

i) $log_{10}(log_{10}\ 10^{10})$

j) $\log\left(10^{10 \log 10^2}\right)$

13) Calcular realizando cambio de base

a) $log_2\ 10$ b) $log_5\ 2$ c) $log_{1/2}\ 20$ d) $log_4\ 0{,}1$.

7.3 Ecuaciones Exponenciales y Logarítmicas

Ya hemos resuelto ecuaciones exponenciales del tipo $5^{3-x} = 5^3$ y del tipo $10^{1-x} = 30$ utilizando logaritmos. Ahora resolveremos ecuaciones más complejas utilizando las propiedades del logaritmo.

Ejemplo: Calcular el valor de x en las siguientes ecuaciones exponenciales...

Aplicamos las propiedades de logaritmo y resolvemos la ecuación resultante en forma habitual

a) $3^x \,.\, 5^{2x} = 4$

$$\begin{aligned} log\ (3^x \,.\, 5^{2x}) &= log\ 4 \\ log\ 3^x + log\ 5^{2x} &= log\ 4 \\ x \,.\, log\ 3 + 2\,x\ log\ 5 &= log\ 4 \\ x \,.\, 0{,}477 + 2\,x \,.\, 0{,}699 &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, 0{,}477 + x \,.\, 1{,}398 &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, (0{,}477 + 1{,}398) &\cong 0{,}602 \\ x \,.\, 1{,}875 &\cong 0{,}602 \\ x &\cong 0{,}321 \end{aligned}$$

Recordemos que…

$a^{m+n} = a^m \,.\, a^n$

$a^{-1} = 1/a$

Extraemos 3^x factor común, resolvemos y aplicamos a la expresión $3^x = 729{,}3$ logaritmo para luego resolver mediante propiedades.

b) $3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$

$$3^{x+1} + 3^{x-1} = 2431$$

$$3 \,.\, 3^x + 3^{-1} \,.\, 3^x = 2431$$

$$3^x \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 2431$$

$$3^x \,.\, \frac{10}{3} = 2431$$

$$3^x = 729{,}3$$

$$x\ log\ 3 = log\ 729{,}3$$

$$x = \frac{log\ 729{,}3}{log\ 3}$$

$$x \cong 6{,}0003$$

Consideremos $z = 3^x$, reemplazando en la ecuación, obtenemos una ecuación de segundo grado y encontramos las raíces como se mostró en la Unidad 5.

c) $3^{2x} - 4 \,.\, 3^{x+1} = -27$

$$(3^x)^2 - 4 \,.\, 3 \,.\, 3^x + 27 = 0$$

$$z^2 - 12\,z + 27 = 0$$

las raíces de esta ecuación son $z_1 = 9$, $z_2 = 3$.

Por lo tanto $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$

y $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

Si reemplazamos
$z = 5^x$
obtenemos una
ecuación de segundo grado.

d) $25^x + 5^x = 20$

$$25^x + 5^x = 20$$
$$(5^x)^2 + 5^x = 20$$

$$z^2 + z - 20 = 0$$

Raíces de la ecuación cuadrática: $z_1 = 4$, $z_2 = -5$.

Luego $5^x = 4 \Rightarrow x \log 5 = \log 4$

$\Rightarrow x \cong 0{,}8613$

Atención

Una vez obtenidas las soluciones no olvides verificar si las mismas satisfacen la ecuación.

Si consideramos $5^x = -5$, vemos que no hay valores de x que cumpla la ecuación, pues ninguna potencia de 5 puede ser negativa.

Por ejemplo, calculemos el valor de x en las siguientes ecuaciones logarítmicas:

Aplicando la
definición de logaritmo.

a) $\log_5 4x = 2$

$$\log_5 4x = 2$$
$$4x = 5^2$$
$$x = \frac{25}{4}$$

b) $\log_9 (x + 1) + \log_9 9 (x + 1) = 2$

$$\log_9 (x + 1) + \log_9 9 (x + 1) = 2$$
$$\log_9 9 (x + 1)^2 = 2$$
$$9 (x + 1)^2 = 9^2$$
$$(x + 1)^2 = 9$$

Observemos que...

con la solución
$x_2 = -4$ obtenemos
$\log_9 (-3) = x \Leftrightarrow 9^x = -3$
igualdad que no se verifica para
ningún valor de x.

$$|x + 1| = 3 \quad \begin{cases} x + 1 = 3 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x + 1 = -3 \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$$

Hemos considerado $z = \log_2 x$.

c) $2 \log_2^2 x - 10 \log_2 x + 8 = 0$

$$2z^2 - 10z + 8 = 0$$

Atención

No olvides verificar las soluciones y descartar alguna si es necesario.

cuyas soluciones son $z_1 = 4$, $z_2 = 1$

$$log_2\, x = 4 \iff x = 2^4 = 16$$

$$log_2\, x = 1 \iff x = 2^1 = 2$$

Necesitamos que todos los logaritmos involucrados en esta ecuación estén expresados en la misma base para poder utilizar las propiedades. Expresamos todos los logaritmos en base 2.

d) $3\, log_2\, x - 2\, log_4\, x = 2$

$$log_4\, x = y \iff x = 4^y$$

$$log_2\, x = y\, log_2\, 4$$

$$log_2\, x = y \,.\, 2$$

$$y = \frac{1}{2}\, log_2\, x$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$3\, log_2\, x - log_2\, x = 2$$

$$2\, log_2\, x = 2$$

$$log_2\, x = 1$$

$$x = 2$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

14) Resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas

Ejercicios Complementarios

a) $log\, x = 3\, log\, 2$

b) $log\, x - log\, 3 = 2$

c) $5\, log\, x - log\, 32 = log\, \frac{x}{2}$

d)$2\, log\, x = log\, \frac{x}{2} - \frac{3}{5}$

e) $log\, 10 = 5 - 3\, log\, x$

f) $10\, log_5\, x - 5\, log_5\, x + 5 = 0$

g) $log\, \dfrac{21 - x^2}{3x + 210} = 2$

g) $log_3\, x^2 + log_3\, x - 6 = 0$

i) $ln\, x - ln\, x^3 = 8$

j) $log_2^2\, x - 5\, log_2\, x = 0$

15) Calcular el valor de x.

a) $log_a\, x = log_a\, 9 - log_a\, 4$

b) $log_a\, x = 3\, (log_a\, 5 + 4\, log_a\, 2 - log_a\, 3)$

c) $log_a\, x = \dfrac{3 \log_a 4}{5}$

16) Resolver las siguientes ecuaciones exponenciales

a) $4 \,.\, 3^x - 4 = 0$

b) $3 \,.\, 4^x + 6 = 0$

c) $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

d) $2^x - 2^{2-x} = 0$

e) $3^{2x} + 9^x = 162$

Ejercicios complementarios

f) $2^x + 4^x = 72$

g) $\dfrac{3^x + 3^{-x}}{3^{-x}} = 10 \,.\, 3^{x-1}$

h) $5^x + 5^{1-x} = 6$

i) $e^{2x} - 5\,(e^x - e) - e^{x+1} = 0$

j) $\sqrt[x]{3^{x+6}} - \sqrt[x-1]{3^x} = 0$

17) Una sustancia radiactiva se desintegra de acuerdo a la fórmula $r(t) = c\, e^{-7\,t}$ donde c es una constante. ¿En cuánto tiempo habrá exactamente un tercio de la cantidad inicial?.

18) Una población de bacterias crece de acuerdo a la fórmula $B(t) = c\, e^{kt}$ donde c y k son constantes y $B(t)$ representa el número de bacterias en función del tiempo. En el instante $t = 0$ hay 10^6 bacterias. ¿En cuánto tiempo habrá 10^7 bacterias, si en 12 minutos hay $2 \,.\, 10^6$ bacterias?.

19) En 1900 la población de una ciudad era de 50000 habitantes. En 1950 había 100000 habitantes. Asumamos que el número de habitantes en función del tiempo se ajusta a la fórmula $P(t) = c\, e^{kt}$ donde c y k son constantes. ¿Cuál fue la población en 1984?. ¿En qué año la población es de 200000 habitantes?.

20) La presión atmosférica como función de la altura está dada por la fórmula $P(h) = c\, e^{kh}$ donde c y k son constantes, h es la altura y $P(h)$ es la presión en función de la altura. Si en el barómetro se lee 30 al nivel del mar y 24 a los 6000 pies, hallar la lectura barométrica a los 10000 pies.

21) El azúcar se descompone en el agua según la fórmula $A(t) = c\, e^{-kt}$ donde c y k son constantes. Si 30 kilos de azúcar se reducen a 10 kilos en 4 horas, ¿cuánto tardará en descomponerse el 95% del azúcar?.

22) Una partícula se mueve con velocidad $S(t) = c\, e^{-kt}$ donde c y k son constantes. Si la velocidad inicial en $t = 0$ es de 16 unidades por minuto, y en 2 minutos se reduce a la mitad, hallar el valor de t cuando la velocidad es de 10 unidades/minuto.

23) ¿Qué relación debe existir entre a y b para que se verifique que

$\log a + \log b = 0$?.

24) Si el punto (2, 5) pertenece a la gráfica de la función exponencial $y = p^x$, ¿cuánto vale p?

25) Si a y b son dos números enteros, calcular el valor de $\log_{1/a} a + \log_b \dfrac{1}{b}$.