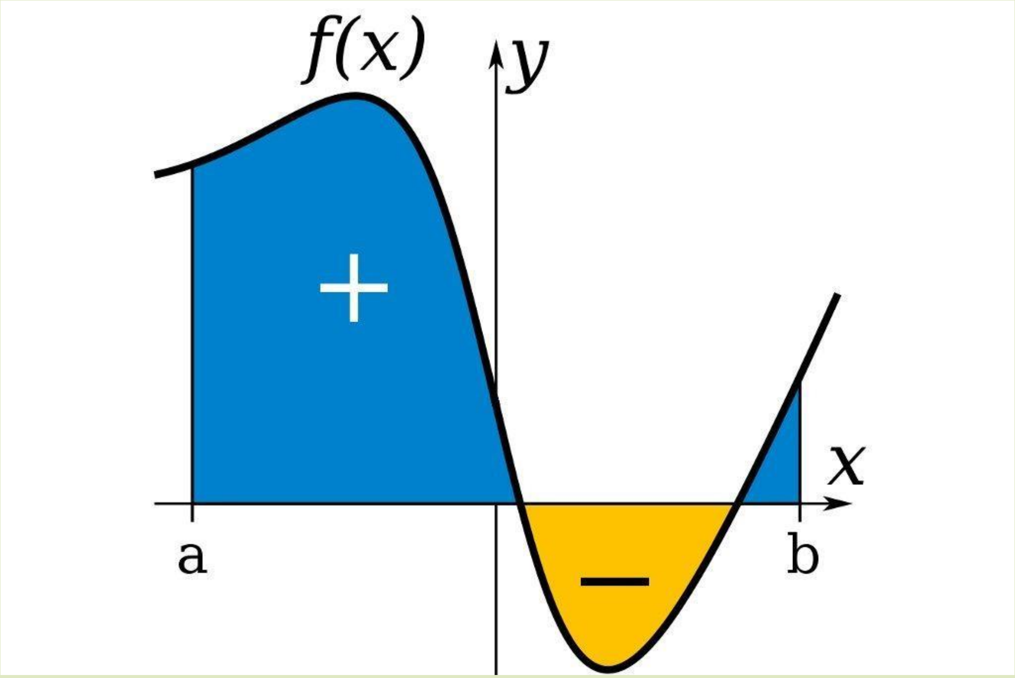
CÁLCULO DIFERENCIAL
Clase 1



Elaboró Msc. Efrén Giraldo Toro.

2 ❖MIS VALORES

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema. Servir a las personas.

El objetivo de estas diapositivas es solo hacer más fácil el estudio y entendimiento del Cálculo diferencial.

Su fin es únicamente pedagógico.

Se acepta cualquier tipo de sugerencia para mejorar el contenido.

JUSTIFICACION: El Cálculo Diferencial es una de las herramientas más potentes y eficaces para estudiar diversos fenómenos. Tiene aplicaciones en muchas ramas de las ciencias.

Por lo tanto es indispensable que el estudiante desarrolle competencias en el manejo y aplicación de los conceptos del cálculo diferencial.

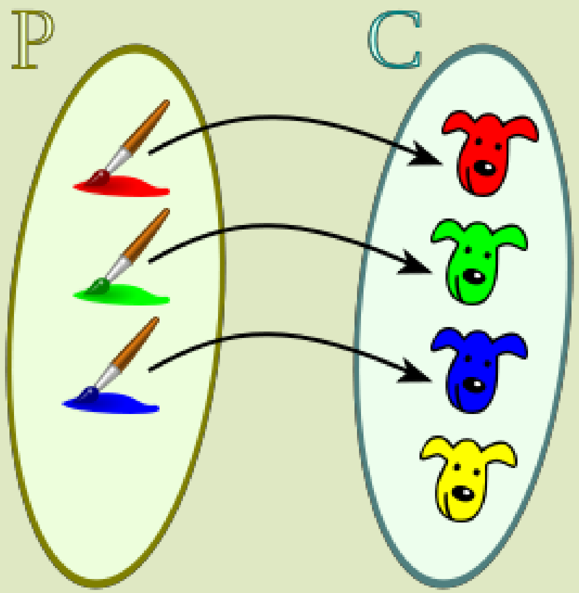
- Los objetos fundamentales con los que trata el Cálculo son las funciones. A partir de allí determina límites, derivadas e integrales.
- Este capítulo prepara el camino para el Cálculo discutiendo las ideas básicas sobre las gráficas de funciones y la manera de transformarlas y combinarlas.

- El Cálculo es fundamentalmente diferente de las matemáticas que ha estudiado anteriormente.
- Es menos estático y más dinámico. Estudia las funciones, se ocupa de los cambios y el movimiento; estudia cantidades que se aproximan a otras cantidades.

Veremos luego los principales tipos de funciones que aparecen en el Cálculo y describiremos cómo se utilizan estas funciones para modelar matemáticamente fenómenos del mundo real.

3

CLASE 1



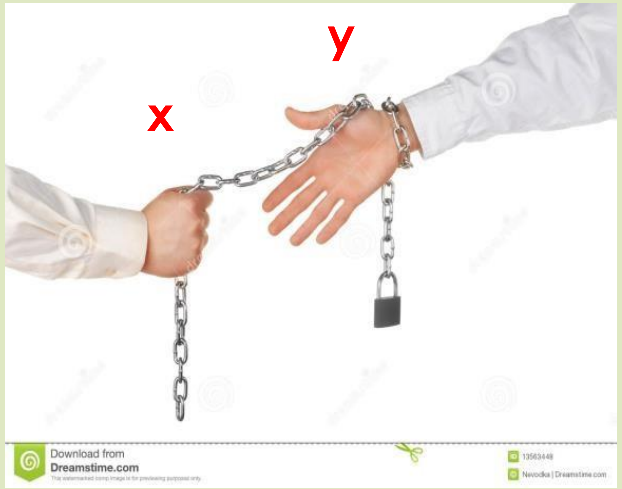
- Definición de función. Dominio y rango de funciones.
- Representación de las funciones. Obtención del dominio gráfica y analíticamente.

Objetivos específicos

- Entender claramente el concepto de función.
- Comprender y determinar el dominio y rango de las funciones.
- Aplicar los conceptos de función, rango.

- Una función puede representarse de diferentes maneras:

1. Mediante una ecuación
2. Una tabla
3. Una gráfica
4. Por pares ordenados
5. Mediante palabras



- Las funciones surgen cuando <u>una cantidad depende de otra</u>.

Considere las situaciones siguientes:

EJEMPLO INTERACTIVO DE FUNCIONES

UNA HIPÉRBOLA INTERACTIVA

Funciones reales

Muchos variables dependen de otras. Así, sabemos que el precio del transporte público depende del precio del petróleo, y cuando sube éste, nos incrementan el precio del transporte.

También es conocido que cuando subimos una gran montaña la presión atmosférica va disminuyendo.

Si nos sumergimos en una piscina que tenga buena profundidad o en un charco profundo, notamos que la presión del agua se va haciendo cada vez más fuerte.

De hecho, una función relaciona dos variables que tienen un vínculo entre sí, por lo que su estudio proporciona mucha información sobre el comportamiento de una de estas variables respecto a la otra.

Saber cómo influye un elemento sobre otro tiene grandes utilidades en muy diversos campos del conocimiento (economía, física, química, biología...) y las matemáticas nos dan las herramientas para analizar estas relaciones llamadas funciones.

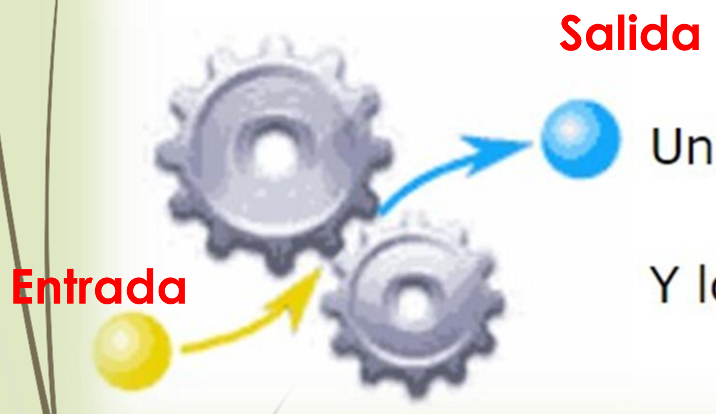
El área A de un circulo depende de su radio r. Si se aumenta el radio necesariamente se aumenta el área.

La regla que relaciona A con r está dada por la ecuación:

$$A = \pi r^2$$

- Con cada número positivo r hay asociado un valor de A, por lo que decimos que A es una *función* de r.

¿Qué es una función?



Una función es como una máquina: tiene una entrada y una salida.

Y lo que sale está relacionado de alguna manera con lo que entra.

www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

14

http://www.alliancevending.es/servicios-y-productos/maquinas-expendedoras/maquinas-expendedoras-refrescos/

15

Nombres

Primero, es útil darle un nombre a una función. El nombre más común es "***f***", pero puedes ponerle otros como "***g***" ... o hasta "***mermelada***" si quieres.

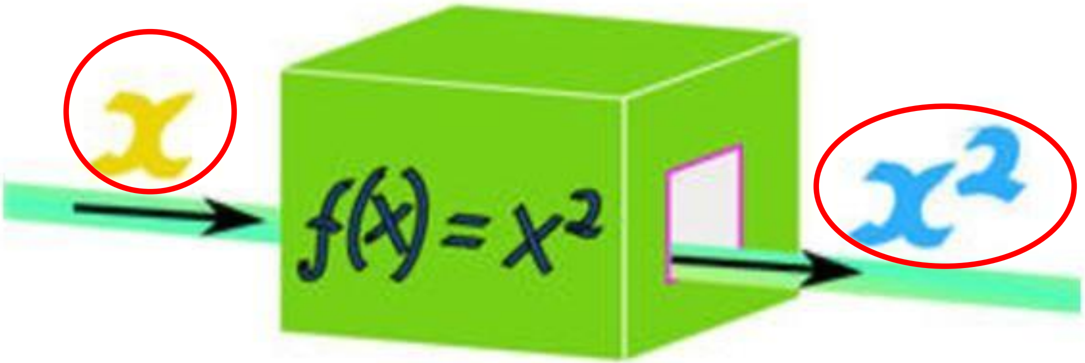
Y también está bien darle nombre a lo que se va adentro de la función, se pone entre paréntesis () despué del nombre de la función:

Así que ***f(x)*** te dice que la función se llama "***f***", y "***x***" se pone dentro

www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

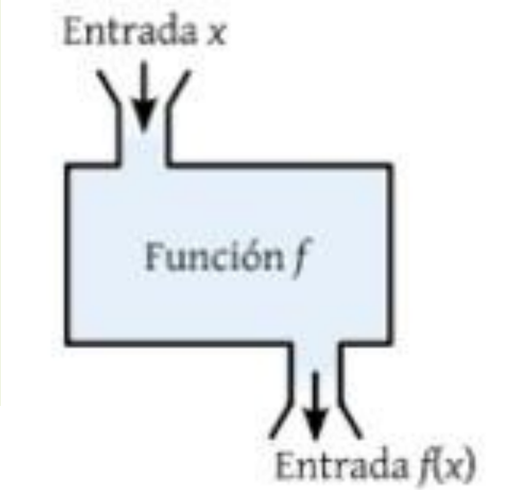
Y normalmente verás lo que la función hace a la entrada:

f(x)* = *x*²** nos dice que la función "f***" toma "***x***" y lo eleva al cuadrado.



Así que con la función "$f(x) = x^2$", una entrada de 4 da una salida de 16. De hecho podemos escribir **f(4) = 16**.

www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html



Relacionar

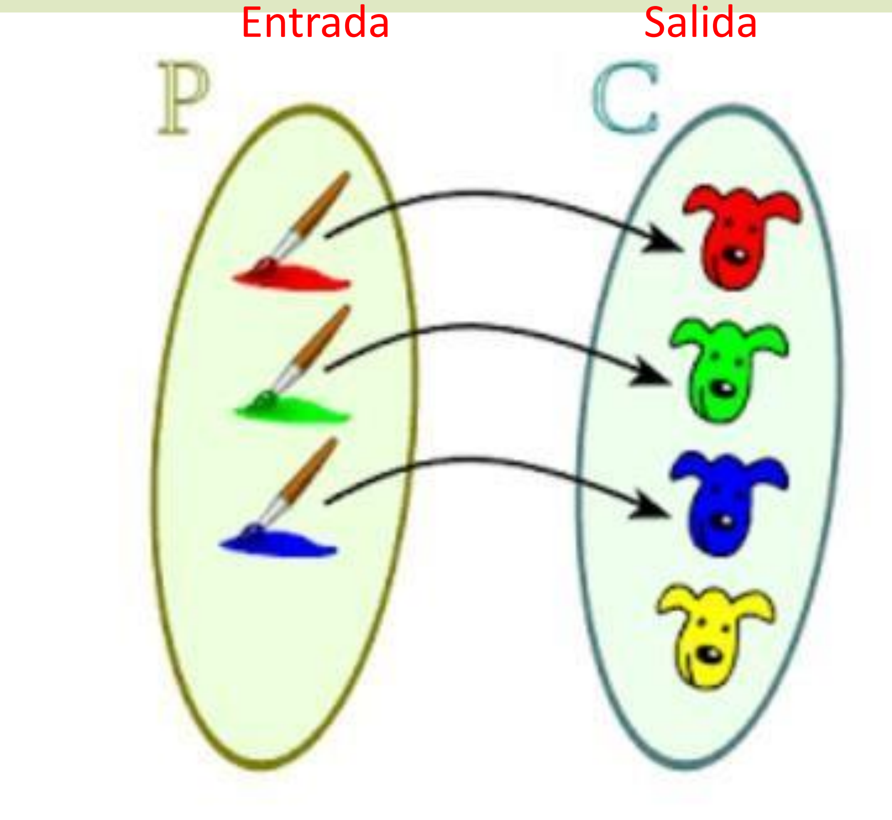
Arriba dije que una función es **como** una máquina. Pero una función no tiene engranajes ni correas ni partes que se muevan. ¡Y no destruye lo que pones dentro!

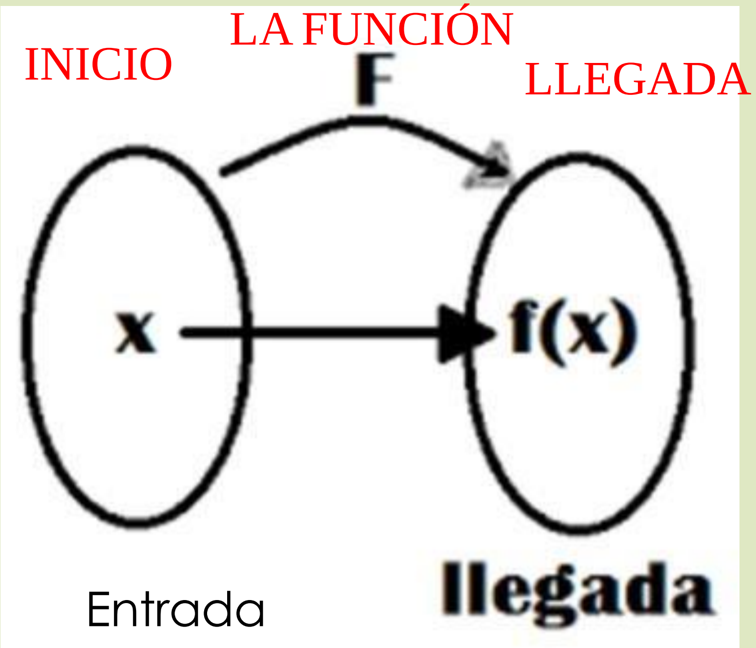
En realidad, una función ***relaciona*** la entrada con la salida.

Decir que "**f(4) = 16**" es como decir que 4 está relacionado de alguna manera con 16. O también 4 → 16

$$f(4) = 16$$

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html





ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

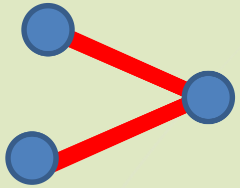
La función devuelve un solo elemento a la salida; en la salida da un solo elemento.

"exactamente uno" significa que la función es ***univaluada***. No devolverá 2 o más resultados para la misma entrada. ¡Así que "f(2) = 7 **o** 9" no vale!

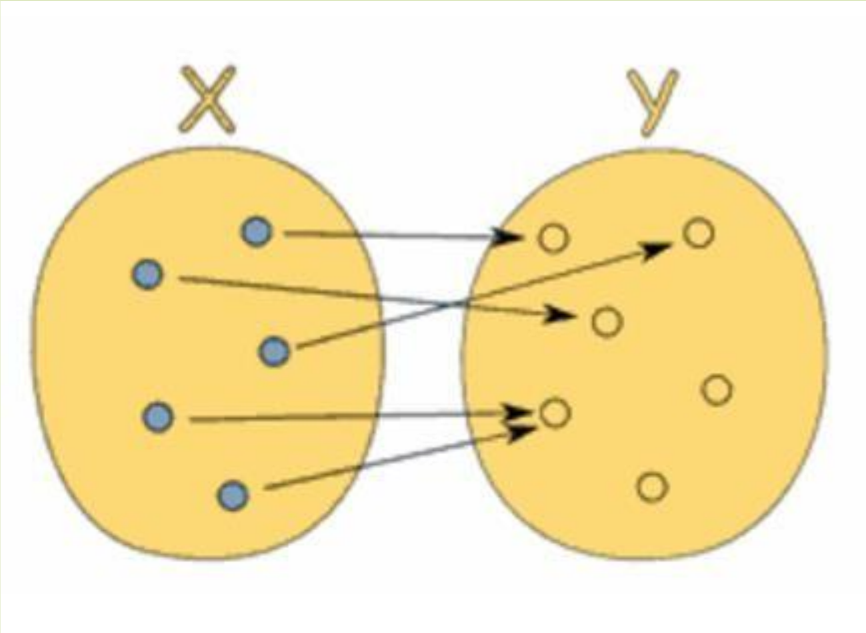
Cada elemento de "X" se relaciona con un elemento de "Y". Decimos que la función ***cubre*** "X" (relaciona cada elemento de)

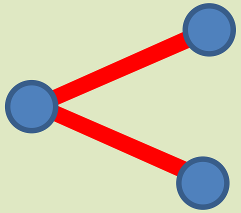
No pueden quedar elementos de X sin que se relacionen con alguno de Y.

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html



Si es funcion





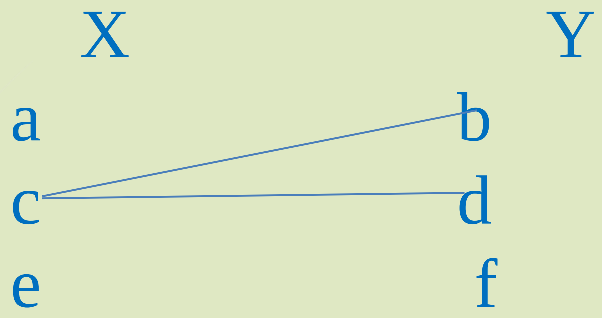
No es función.

También fíjate que en el dibujo de arriba hay dos elementos en "X" que se relacionan con el mismo elemento de "Y". No pasa nada. No hay ninguna regla contra esto. Sigue siendo función.

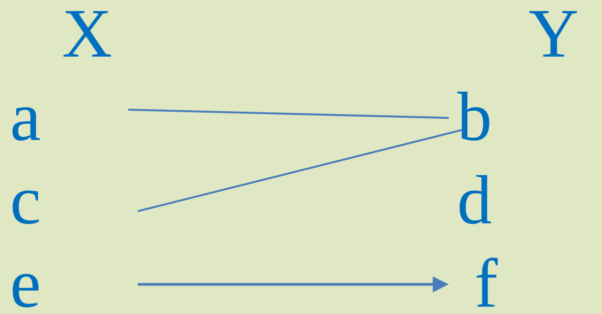
Y finalmente, fíjate en que algunos elementos de "Y" no se relacionan con nada. Eso también vale.

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

Pero no hay elementos de X que aparezcan solos si relacionarse con alguno de y. Eso no valdría.

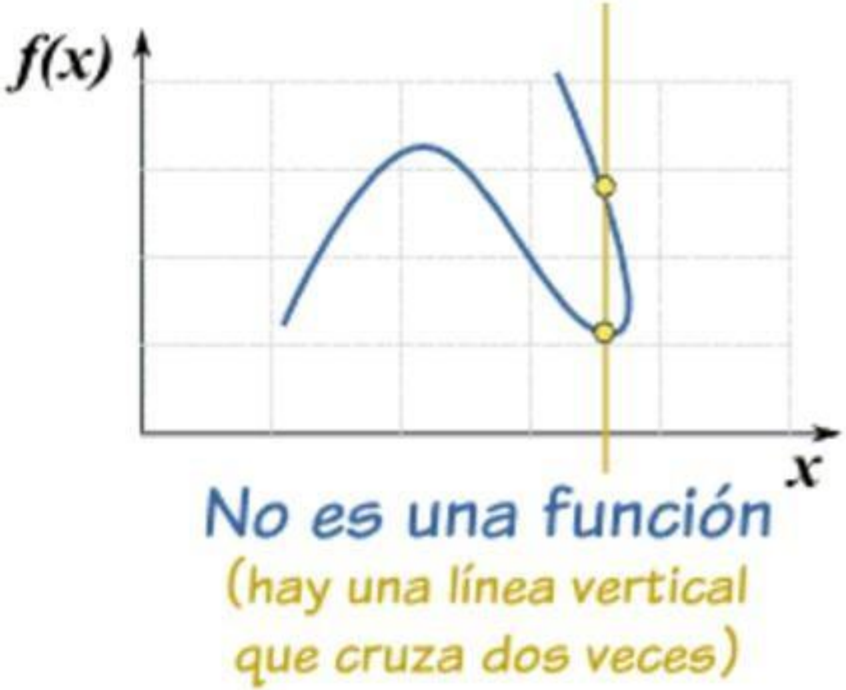


No es función



Si es función

Para una X exsiten dos y.



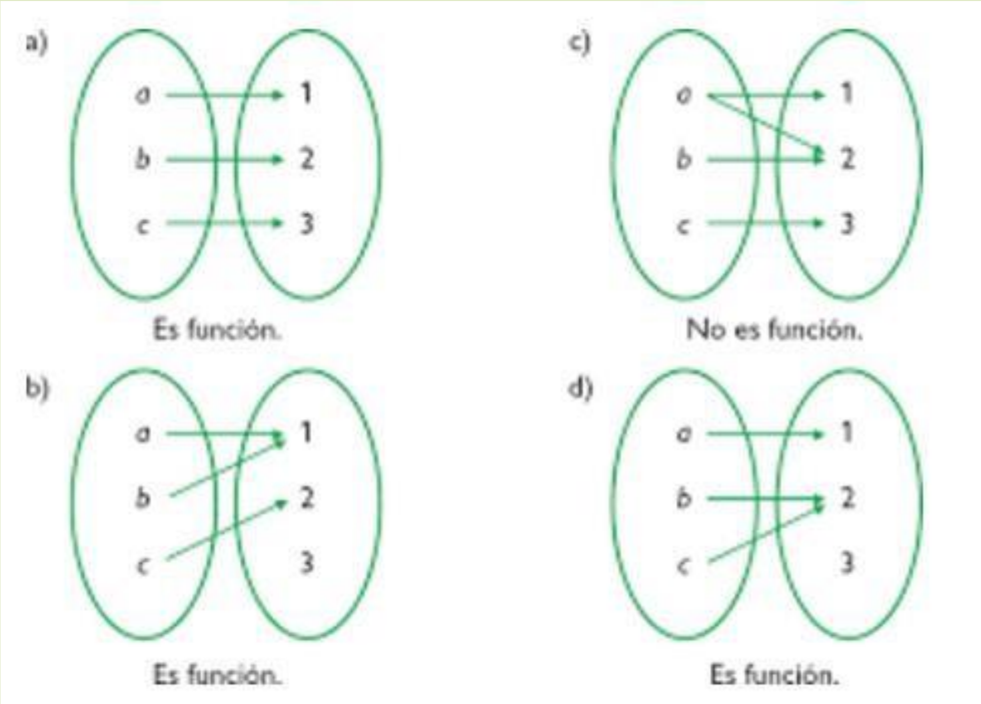
La prueba de la línea vertical

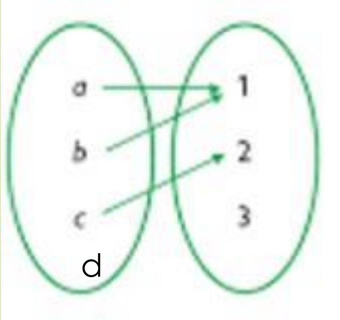
En un gráfico, la idea de **univaluada** significa que ninguna línea vertical cruza más de una vez.

Si alguna **cruzara más de una vez** no sería **una función**.

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

23


a)
a
b
c
1
2
3
Es función.
c)
a
b
c
1
2
3
No es función.
b)
a
b
c
1
2
3
Es función.
d)
a
b
c
1
2
3
Es función.


a
b
c
d
1
2
3

¿

Entrada Salida

25

Funciones como pares ordenados P(x,y)

Pares ordenados

Puedes escribir las entradas y salidas de una función como "pares ordenados", como (4,16).

Se llaman pares **ordenados** porque la entrada siempre va primero y la salida después.

Así que (4,16) significa que la función toma "4" y devuelve "16"

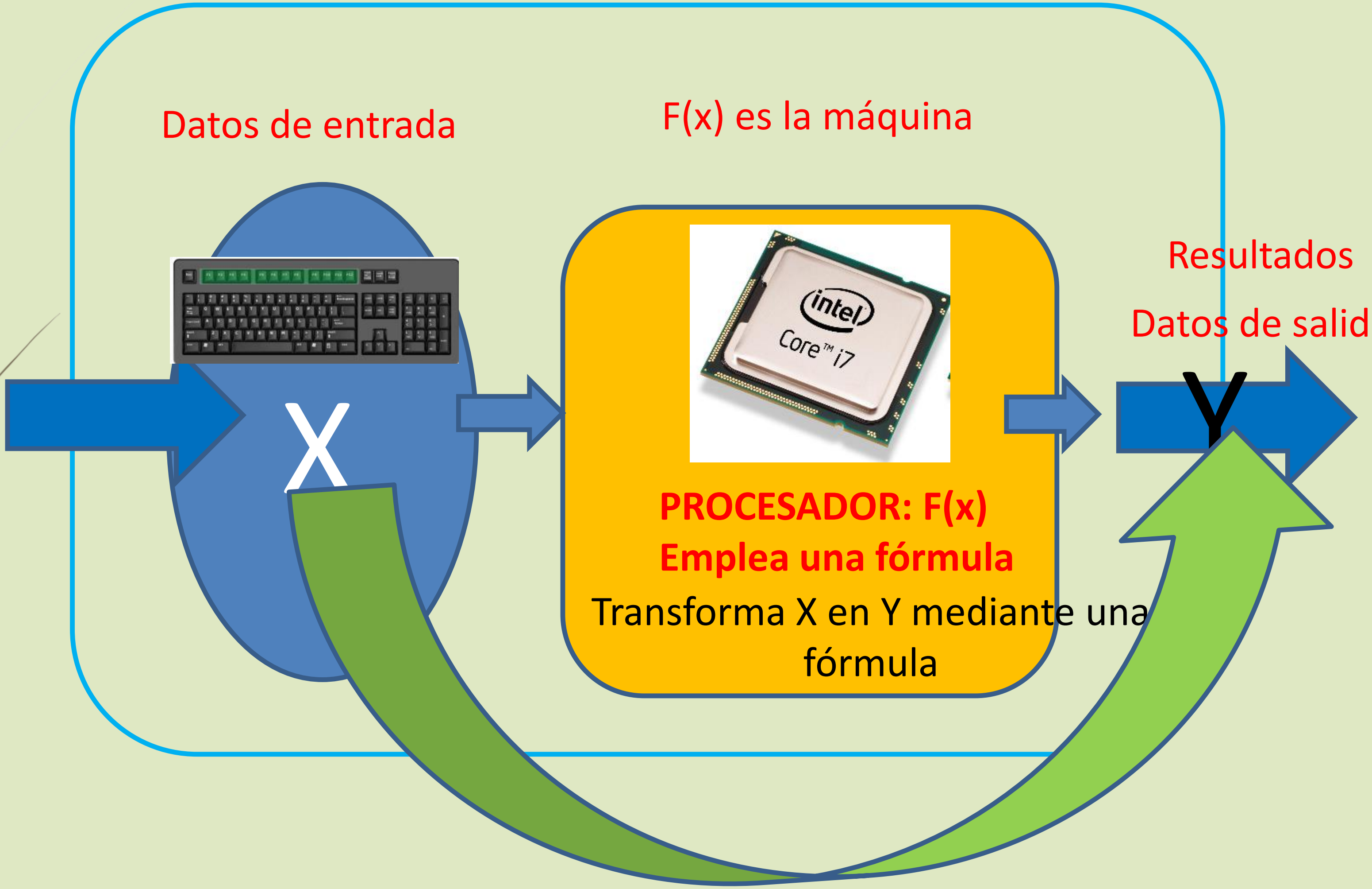
ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

Y una función se puede definir como un **conjunto de pares ordenados**:

> Ejemplo: {(2,4), (4,5), (7,3)} es una función que dice que "2 se relaciona con 4", "4 se relaciona con 5" y "7 se relaciona con 3".
>
> Fíjate también en que el dominio es {2,4,7} y el rango es {4,5,3}

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

El procesador, máquina o función.



Mi máquina de funciones para transformar un número de entrada en otro de salida.

Otra manera de ver función

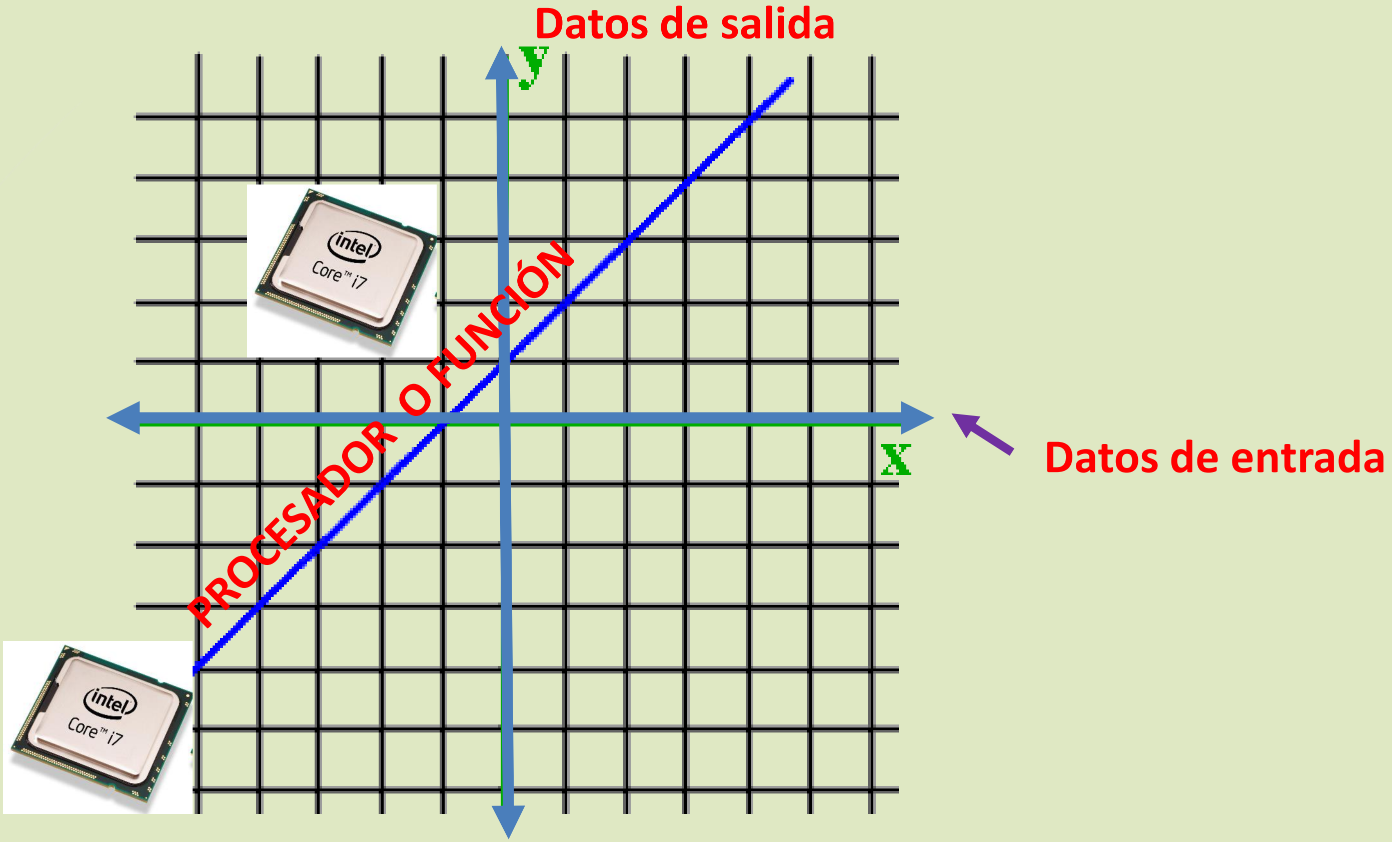
Si ambos datos están graficados en un plano cartesiano, **la gráfica es el procesador, máquina o función** y por medio de esta gráfica puedo a partir de los datos de entrada hallar los de salida.

Supongamos que nuestro procesador es una línea recta en una cuadrícula con ejes cartesianos.

Si usted me da un número, yo pondré ese número en el mi máquina. Usaré esa recta en un plano cartesinao, como mi máquina de función **f,** para ver qué resultado obtenemos.

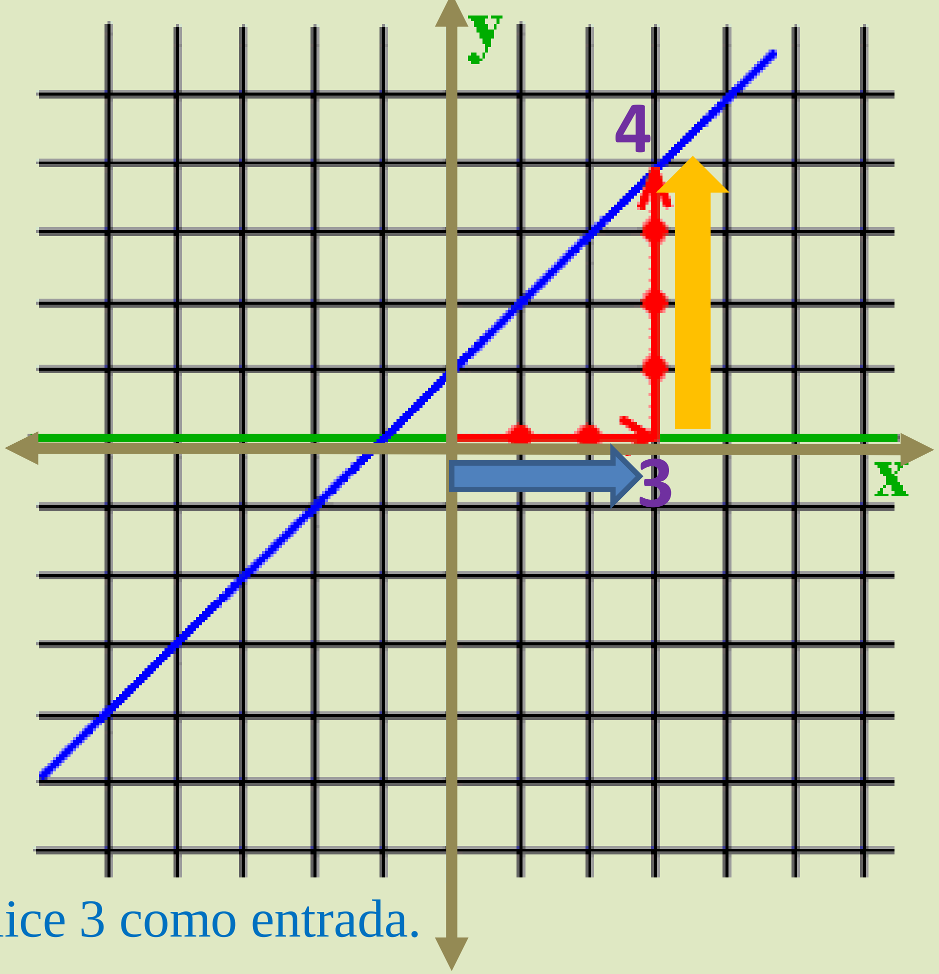
http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Slopeslider/Index.html

Datos de salida



El dato de entrada es conocido y **el procesador o función (la línea) me da y me ubica el dato de salida que es único**. El dato de entada se ubica en el eje x, el de salida en el eje y (o paralelo a él).

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Slopeslider/Index.html

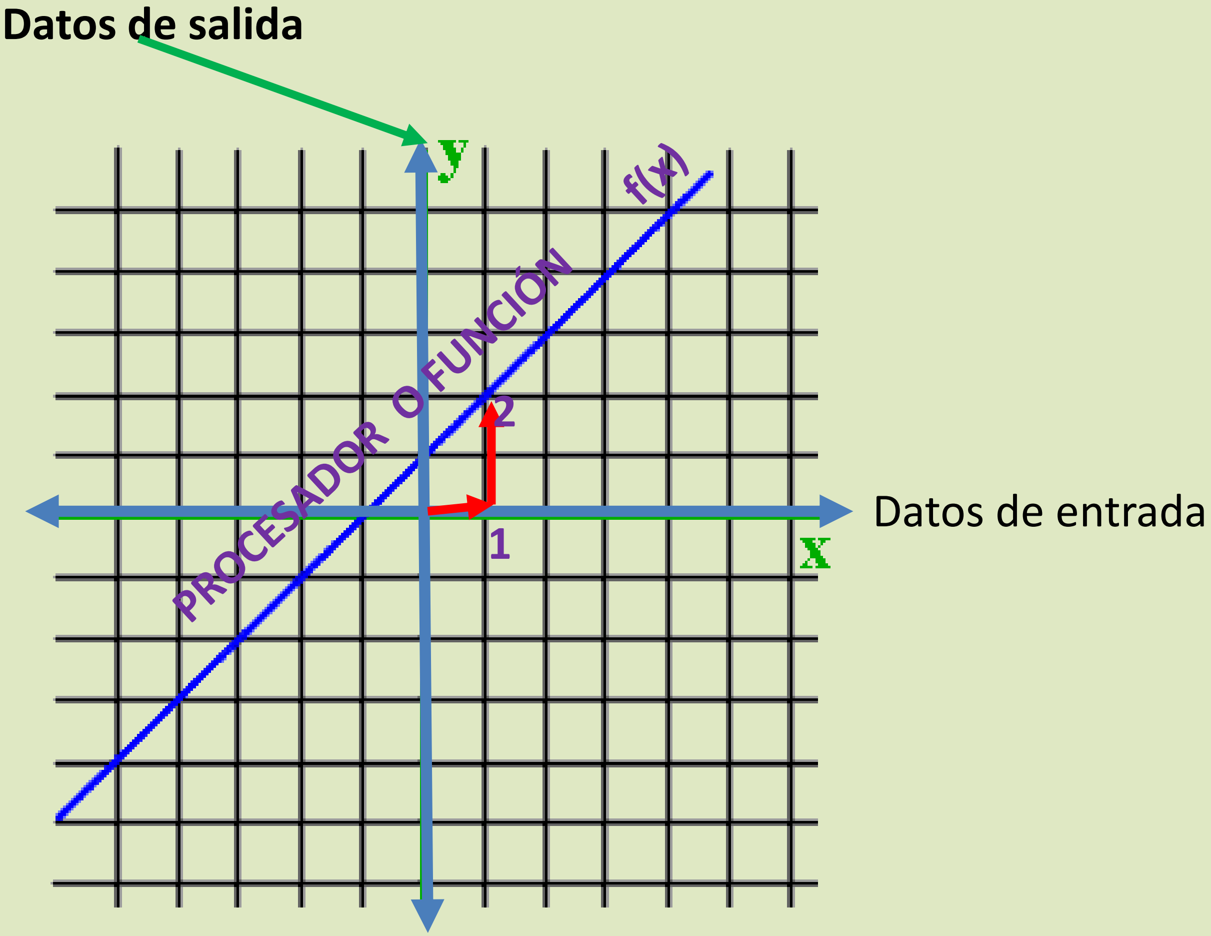


Estudiante: Entonces utilice 3 como entrada.

Maestro: Con gusto. Simplemente cuento tres pasos a la derecha (+) en eje X, a partir de cero. Luego me desplazo verticalmente (hacia arriba o hacia abajo si es -) hasta encontrar la recta, y cuento los pasos que dí. En este caso subo: uno, dos, tres, cuatro pasos.

¡4 es el resultado que nos da esta función, al entrar el número 3! . 3 lo convierte en 4.

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Slopeslider/Index.html



Estudiante 1: ¿Puedo ensayar? Quiero entrar 1 en la máquina de función.

Maestro: claro.

Estudiante: Comienzo en cero, doy un paso a la derecha, luego subo y cuento los pasos: Un dos. Entonces al entrar 1 la función da como resultado 2. ¿Voy bién? Maestro: Muy bien.

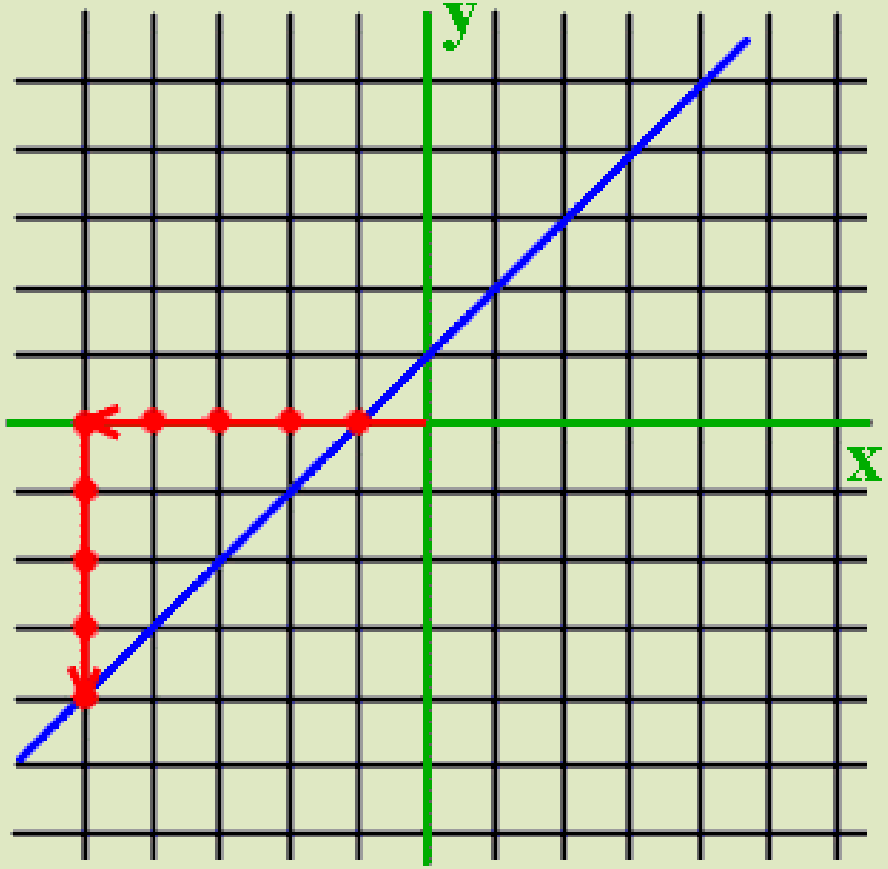
http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Slopeslider/Index.html

Estudiante 2: ¿Alguna vez se va a la izquierda de cero en el eje x?

Maestro: Por supuesto. Los números a la izquierda de cero se llaman números negativos. Ponemos un signo menos delante de un número para indicar que está a la izquierda de cero, o sea que es negativo.

Así mismo usamos el signo menos cuando vamos hacia “abajo” en el eje Y a partir de 0.

¿Quién quiere ensayar la máquina con números negativos?



Estudiante: Quiero entrar -5 en la máquina. Entonces recorro 5 pasos hacia la izquierda desde cero, luego subo...no espere, debo ir hacia abajo de la recta porque si no, no la encuentro: uno, dos, tres, cuatro pasos.

Maestro: Entonces la función produce -4 cuando el número de entrada es -5.

http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/activities/Slopeslider/Index.html

También podríamos hacer lo mismo con una fórmula.
Lo que hace en este caso el procesador, máquina o función (mi fórmula) es sencillamente sumarle 1 al dato inicial de entrada. Por tanto nuestra fórmula será:

P x)

X

Y

salida: Y= = X+1

$$(X+1)$$

En vez de mencionar datos de entrada o de salida es más común decir la variable X y la variable Y.

Una función significa "depende de". Este proceso lógico se aplica a todo lo que tiene relación a un resultado o efecto sea este medible o no en forma cuantitativa.

X es la variable independiente, Y es la variable dependiente. O sea, que Y depende de X o Y es función de X. Esto se escribe matemáticamente así:

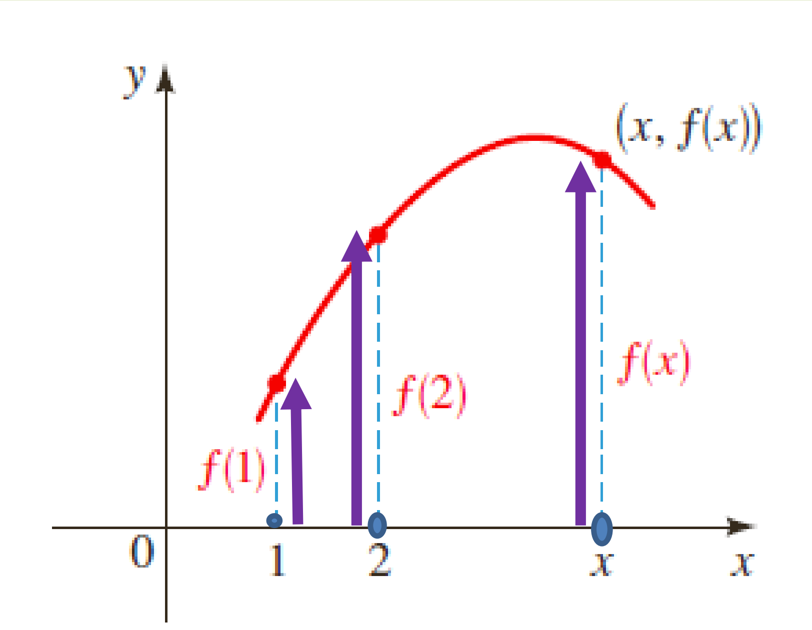
$$Y= f(x)$$

En la práctica no se colocan los datos de entrada aparte de los de salida como en las diapositivas anteriores, sino todo integrado:

Datos de salida Y iguales a f(x) iguales a la fórmula

$$Y=f(x)= X+1$$

Resumiendo lo de la gráfica:



Importante

Una gráfica da el comportamiento o historia de la función. También sirve para hallar y a partir de x. Podemos leer el valor de *f* (*x*) a partir de la gráfica como la **altura de la gráfica arriba del punto *x***: *f(1), f(2), f(3)…f(x). La función y = f(x) realmente es la* ***distancia desde el punto x hasta la gráfica***.

La función viene determinada por la expresión que representa a la función, por ejemplo: $y=f(x)=x^2$.

La gráfica es la unión del conjunto de pares ordenados (x,y).

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ejemplos de funciones.

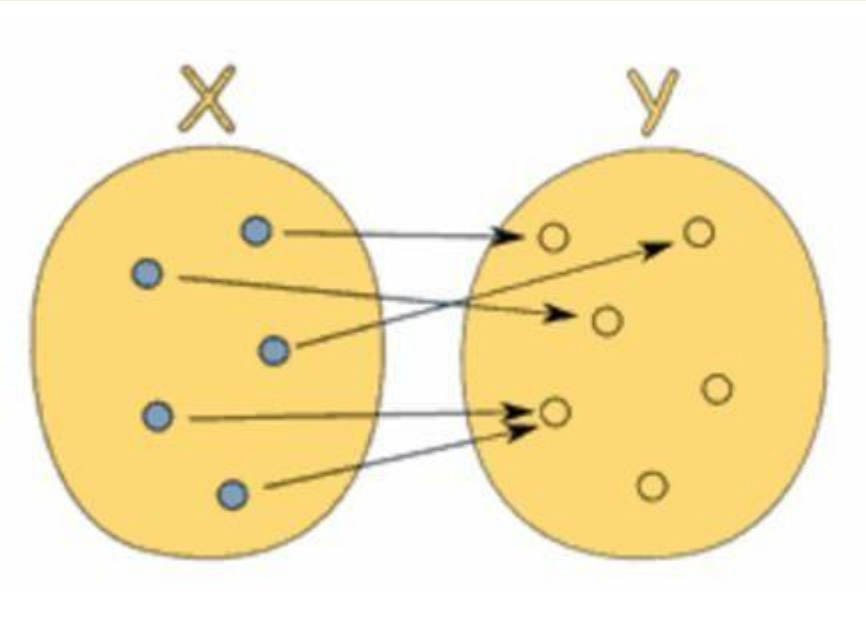
El valor del consumo mensual de agua potable, depende del número de metros cúbicos consumidos en el mes.

El valor de un apartamento depende del número de metros cuadrados construidos.

El costo de una llamada telefónica depende de su duración.

El costo de enviar una encomienda depende de su peso.
Ver documentos anexos en esta subpágina.

Dominio, codominio, rango, imagen



Dominio, codominio y rango

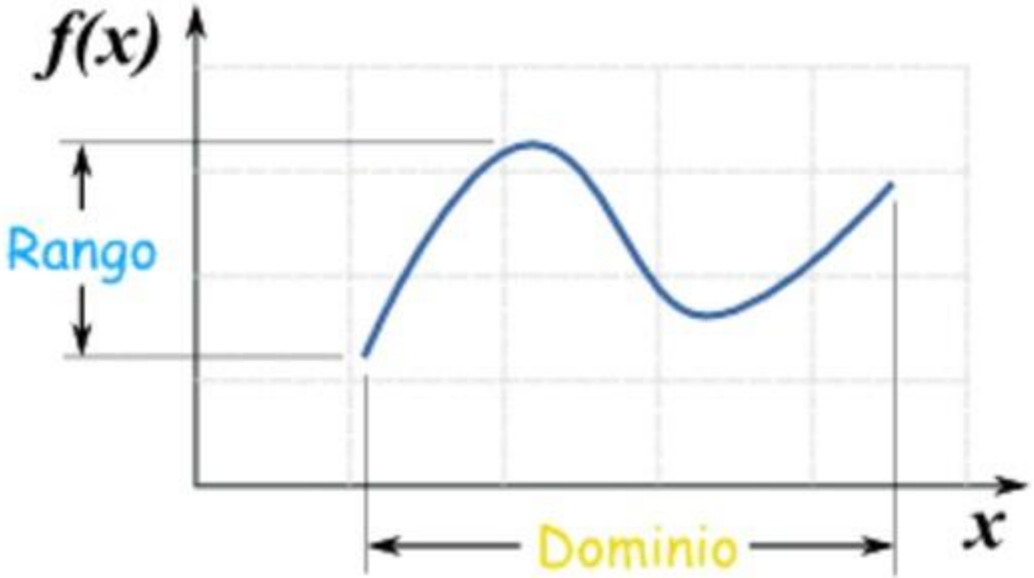
En el dibujo de arriba

- el conjunto "X" es el **dominio**,
- el conjunto "Y" es el **codominio**, y
- el conjunto de elementos de Y a los que llega alguna flecha (los valores verdaderos de la función) se llama **rango** o **imagen**.

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

Rango y dominio gráficamente

Dominio, codominio y rango



En su forma más simple el dominio son todos los valores de x a los que aplicar una función, y el rango son los valores que resultan.

Pero de hecho son conceptos importantes cuando se **define** una función.

ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

El dominio y rango son las proyecciones sobre los ejes X e Y respectivamente.

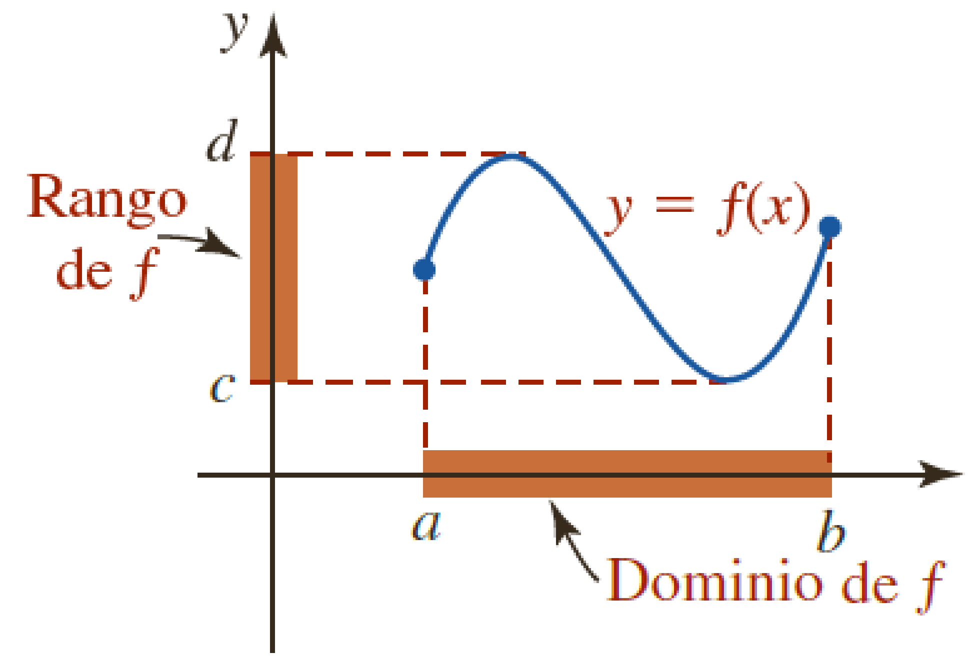
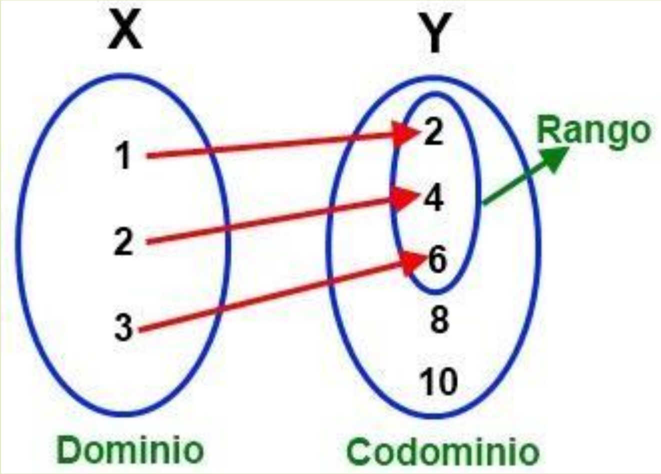


FIGURA 1.1.4 Dominio y rango interpretados gráficamente

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)



Dominio y rango

Hay nombres especiales para **lo que puede entrar**, y también **lo que puede salir** de una función

Lo que **entra** en una función se llama el **dominio**

Lo que **es posible que salga** de una función se llama el **codominio**

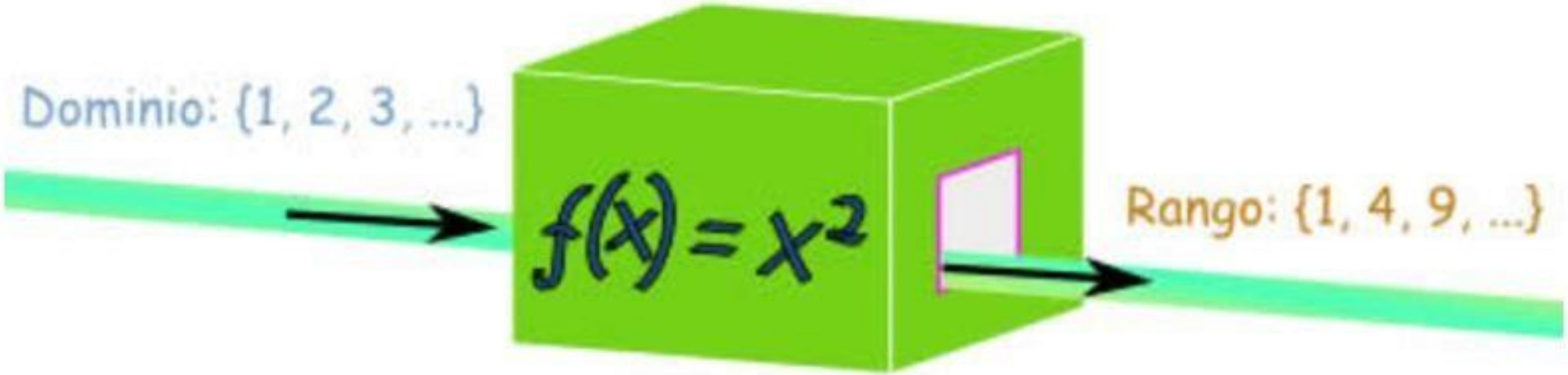
Lo que **en realidad sale** de una función se llama **rango** o **imagen**

Parte de la función

Lo que sale *(el rango)* depende de lo que pones *(el dominio)*, pero **TÚ** defines el dominio.

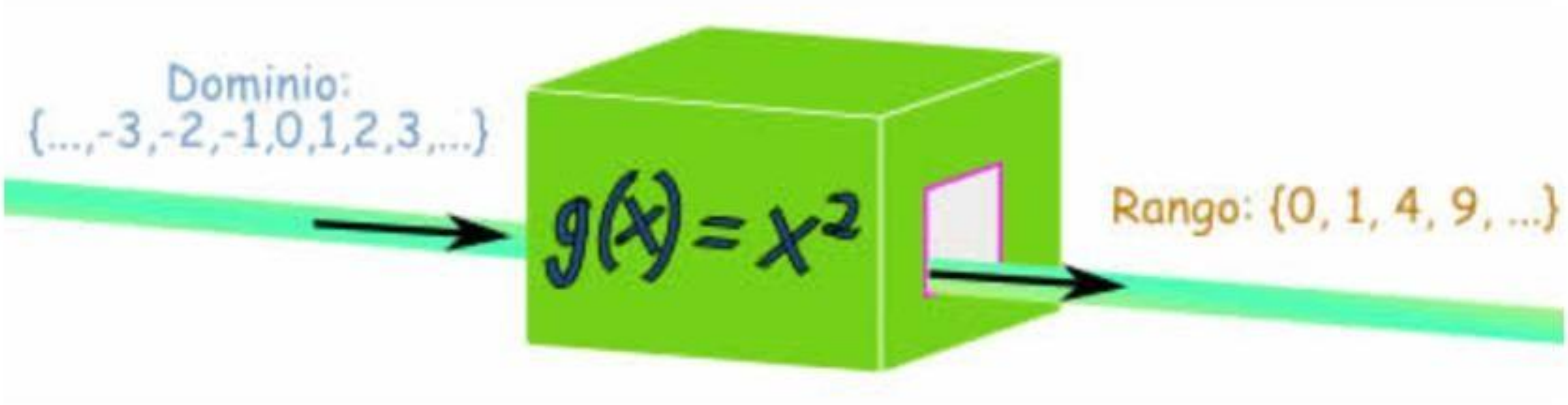
De hecho el dominio es una parte esencial de la función. Un dominio diferente da una función diferente.

Ejemplo: una simple función como $f(x) = x^2$ puede tener **dominio** (lo que entra) los números de contar {1,2,3,...}, y el **rango** será entonces el conjunto {1,4,9,...}



ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

Y otra función $g(x) = x^2$ puede tener como dominio los enteros {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...}, entonces el rango será el conjunto {0,1,4,9,...}



ttp://www.disfrutalasmatematicas.com/conjuntos/funcion.html

33

Dominio y rango

En general, una expresión algebraica puede no estar definida para todos los valores de la variable. El **dominio** de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite tenga la variable. La tabla al margen de esta página da algunas expresiones básicas y sus dominios.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Por ejemplo, no es posible calcular $f(0)$ para la **función recíproca** $f(x) = 1/x$ puesto que $1/0$ no es un número real. En este caso se dice que f está **indefinida** en $x = 0$. Puesto que todo número real diferente de cero tiene un recíproco, el dominio de $f(x) = 1/x$ es el conjunto de números reales excepto cero.

35

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} == \frac{1}{(x-2)(x+2)}$$

$$(x-2)(x+2) = 0 \qquad x = 2, \quad x = -2$$

Por el mismo razonamiento, la función $g(x) = 1/(x^2 - 4)$ no está definida en $x = -2$ ni en $x = 2$, de modo que su dominio es el conjunto de números reales sin los números -2 y 2.

36

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad x \geq 0$$

La **función raíz cuadrada** $h(x) = \sqrt{x}$ no está definida en $x = -1$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. Para que $h(x) = \sqrt{x}$ esté definida en el sistema de números reales, debe pedirse que el **radicando**, en este caso simplemente x, sea no negativo.
A partir de la desigualdad $x \geq 0$ observamos que el dominio de la función h es el intervalo $[0, \infty)$.

$$f(x) = y = -1, \quad -\infty < x < \infty$$

El dominio de la **función constante** $f(x) = -1$ es el conjunto de números reales $(-\infty, \infty)$ y su rango es el conjunto que consta sólo del número -1.

Resumiendo: los dos restricciones más importantes para analizar en el dominio de una expresión algebraica o de una función son:

1. Si hay algún número en el denominador que haga cero la expresión o la función
2. Si la expresión o la función tiene algún radical, los numeros que hacen al interior del radical la expresión negativa.

$$f(x) = 4 + \sqrt{x-3}$$

EJEMPLO 4 Dominio y rango

Determine el dominio y el rango de $f(x) = 4 + \sqrt{x-3}$.

$x - 3 \geq 0$

Solución El radicando $x - 3$ debe ser no negativo. Al resolver la desigualdad $x - 3 \geq 0$ se obtiene $x \geq 3$, de modo que el dominio de f es $[3, \infty)$. Luego, como el símbolo $\sqrt{\ }$ denota la raíz cuadrada no negativa de un número, $\sqrt{x-3} \geq 0$ para $x \geq 3$ y en consecuencia $4 + \sqrt{x-3} \geq 4$. El menor valor de $f(x)$ ocurre en $x = 3$ y es $f(3) = 4 + \sqrt{0} = 4$. Además, debido a que $x - 3$ y $\sqrt{x-3}$ aumentan cuando x crece, se concluye que $y \geq 4$. Por consiguiente, el rango de f es $[4, \infty)$. ■

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

$$g(x) = \frac{5x}{x^2 - 3x - 4}.$$

Una función que está dada por una expresión fraccionaria no está definida en los valores x para los cuales el denominador es igual a 0. Puesto que el denominador de $g(x)$ se factoriza como $x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4)$, vemos que $(x + 1)(x - 4) = 0$ para $x = -1$ y $x = 4$. Éstos son los *únicos* números para los cuales g no está definida. Por tanto, el dominio de la función g es el conjunto de números reales, a excepción de $x = -1$ y $x = 4$. ■

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

$$f(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

EJEMPLO 5 Dominios de dos funciones

Determine el dominio de

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 15}$$

Solución

Como en el ejemplo 4, la expresión dentro del radical —el radicando— debe ser no negativa; es decir, el dominio de f es el conjunto de números reales x para los cuales $x^2 + 2x - 15 \geq 0$ o $(x - 3)(x + 5) \geq 0$. El conjunto solución de la desigualdad $(-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ es también el dominio de f.

En precálculo se suelen resolver desigualdades cuadráticas como $(x - 3)(x + 5) \geq 0$ utilizando una tabla de signos. O el método del cementerio

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

Al usar notación de intervalos, el dominio de g en el inciso *b*) del ejemplo 5 puede escribirse como $(-\infty, -1) \cup (-1, 4) \cup (4, \infty)$. Como alternativa para esta desgarbada unión de intervalos ajenos, este dominio también puede escribirse usando notación de construcción de conjuntos $\{x \mid x \neq -1 \text{ y } x \neq 4\}$.

(Zill, Warrent, Wrigth, 2011)

Representación gráfica

Para representar gráficamente una función debemos primero encontrar su dominio para saber en qué puntos debemos evaluarla.

Una vez encontrado el dominio procederemos a hacer la representación. Por ahora, la manera más sencilla es mediante una tabla de valores, es decir, daremos valores a la variable x, y encontraremos el valor de y, luego dibujaremos en el plano los puntos encontrados usando las coordenadas cartesianas.

http://www.sangakoo.com/es/temas/representacion-grafica-de-una-funcion

Ejemplo

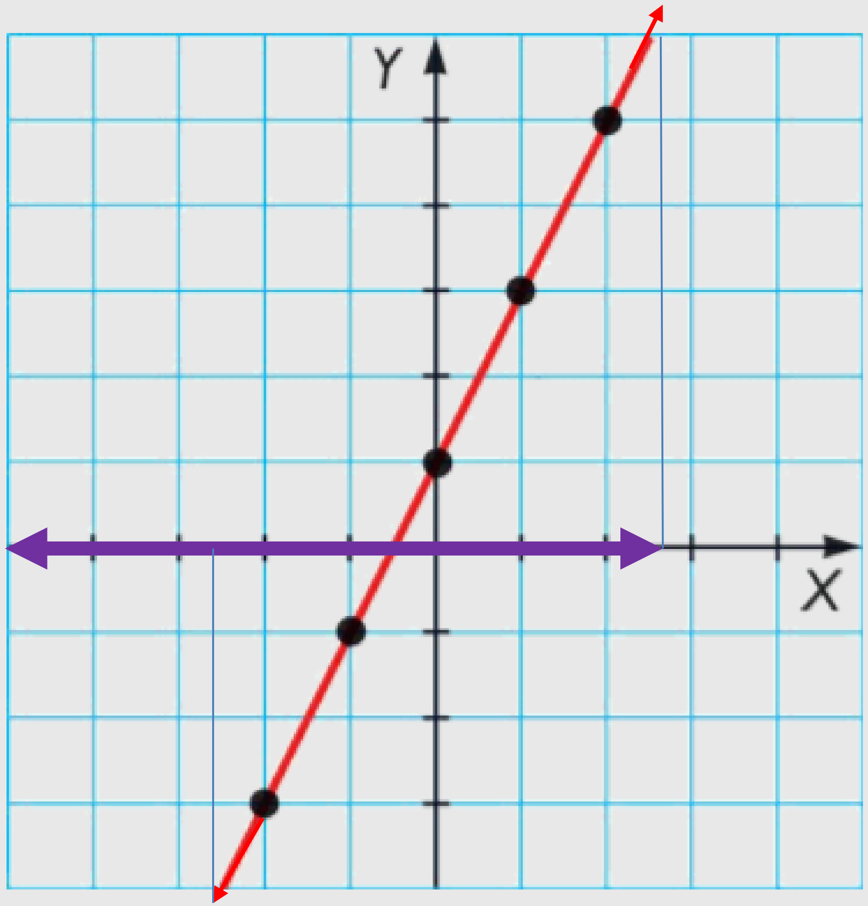
Tomemos la función $f(x) = 2x + 1$ y vamos a hacer la tabla de valores:

x	$f(x)$ = y
-2	$f(2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$
-1	$f(2) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$
0	$f(2) = 2 \cdot (0) + 1 = 1$
1	$f(2) = 2 \cdot (1) + 1 = 3$
2	$f(2) = 2 \cdot (2) + 1 = 5$

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

http://www.sangakoo.com/es/temas/representacion-grafica-de-una-funcion

los que dibujaremos en el plano XY y eos uniremos con una línea. Al final obtenemos:



donde hemos marcado con puntos las coordenadas encontradas en la tabla de valores.

http://www.sangakoo.com/es/temas/representacion-grafica-de-una-funcion

- Resumiendo, una función toma **elementos de un conjunto A**, y los devuelve (normalmente con algún cambios) como elementos de otro conjunto B. Con esto llegamos a la definición formal:

- **Función real** de variable **real** es una correspondencia f que asocia a cada elemento de un conjunto de números **reales**, llamado dominio, otro número **real de otro conjunto llamado rango**.
- El subconjunto del que parte y en el cual se define la **función** se llama dominio o campo existencia de la **función**. Se designa por D.

54

Una **función real** es una función matemática cuyo dominio y codominio están contenidos en el conjunto de los números reales

Bibliografía

Zill, D., Warrent, S. y Wright. (2011). Cálculo Trascendentes tempranas. Mac Graw Hill, 4 ed. México.

Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo, Matemáticas para el Cálculo. Cencage Learning, 6 Ed. México.

Bibliografía en la nube.

- 25 herramientas para enseñar matemáticas con las tic. Grafiador de Funciones:

http://www.aulaplaneta.com/2015/09/08/recursos-tic/25-herramientas-para-ensenar-matematicas-con-las-tic/

- Goegebra, Cálculo diferencial:

https://www.geogebra.org/m/FrZzy2JJ

- http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Funciones_matematicas.htm

- https://es.slideshare.net/jefedo61/tutorial-de-geogebra-para-representar-funciones

- Graficar:
- https://www.youtube.com/watch?v=In3qLE1E_II l
- https://www.geogebra.org/m/FrZzy2JJ#material/nm2bef5a
- http://www.sangakoo.com/es/temas/representacion-grafica-de-una-funcion

65