Clase 3
Funciones lineales
Líneas rectas

Profesor Efrén Giraldo T. MSc.

La funciones lineales son aquellas donde la variables x e y tienen como exponente solo el 1. Su gráfica es una línea recta.

http://desenderismo.com/blogmaria/?page_id=379

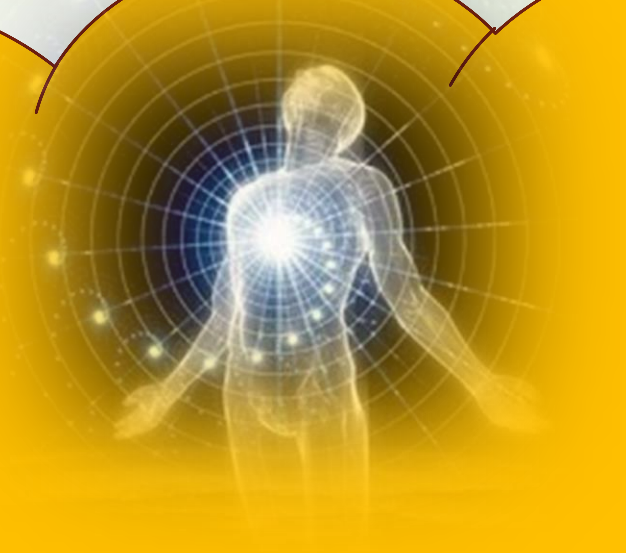
❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

y Persistencia



❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

Temas a tratar.

Razones.
Razones de cambio.
Pendiente de una recta.
Ecuaciones de líneas rectas.
Pendiente como rapidez de cambio de una variable con respecto a otra.
Ejercicios de aplicación práctica de ecuaciones lineales.

El cambio para cualquier variable se da cuando se pasa de un estado inicial a uno final. Para medir el cambio de una variable restamos su valor en el estado final menos su valor en el estado inicial:

$$T_{final} - T_{inicial} = \Delta T$$

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz%C3%B3n_de_Cambio.pdf

Para la variable temperatura T el cambio lo mide la diferencia:

$$T_{final} - T_{inicial} = \Delta T$$

donde ΔT representa el cambio, aumento o disminución, de la temperatura.

¿Cambio de la temperatura con respecto a qué?

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz%C3%B3n_de_Cambio.pdf

Razones

Una razón es una relación entre un numerador y un denominador. Podría ser de la forma $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ o cualquier otra. Es importante entender su significado, pues es de uso común en todas las ramas de la ciencia.

ELABORÓ MSc. EFRÉN GIRALDO T. 2/13/2018

Existen dos razones de cambio principales para un fenómeno:

- Razón de cambio promedio.
- Y la razón de cambio instantáneo.

- La razón de cambio instantáneo es en un tiempo t y se halla posteriormente, mediante el límite o la derivada.

Razón de cambio promedio.

Razón de cambio promedio de una variable respecto a otra es el valor del **cambio** de una variable por unidad de **cambio** de la otra. También se le llama tasa de **cambio**.

El concepto de **razón de cambio** se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra.

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz%C3%B3n_de_Cambio.pdf

Pero podemos preguntarnos, ¿con qué velocidad cambia la temperatura? Para contestar esta pregunta debemos relacionar el cambio de temperatura respecto del cambio del tiempo comparando los cocientes.

Para la variable t el cambio lo mide la diferencia:

$$t_{final} - t_{inicial} = \Delta t$$

donde Δt representa el cambio en el tiempo

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz%C3%B3n_de_Cambio.pdf

Si el numerador tiene unidades y el denominador también, por ejemplo grados centígrados para la temperatura en el numerador (eje y), y segundos para el tiempo en el denominador (eje x) se podría tener:

$$\frac{50°C-30°C}{20s-10s} = \frac{20°C}{10s} = \frac{2\ °C}{s}$$

O sea, que luego de hacer la operación, se tiene una razón de cambio promedio de $\frac{2\,°C}{s} = \frac{2\,°C}{1s}$, lo cual significa que cada 1segundo la temperatura *varía 2 grados centígrados*. O hay una variación de 2°C cada 1 segundo. Lo mismo se puede aplicar a cualquier razón de cambio para su interpretación.

La razón de cambio de la temperatura con respecto al tiempo da como resultado la velocidad promedio con la que cambia la temperatura respecto del tiempo.

La razón de cambio más frecuente es la **<u>velocidad</u>**, que se calcula dividiendo un trayecto o distancia recorrida entre una unidad de tiempo.

Esto quiere decir que la velocidad promedio se define a partir del vínculo que se establece entre la **distancia** y el **tiempo**.

Supongamos que un automóvil pasa de 10 km a 110 kilómetros desde un tiempo cero a un tiempo de dos horas. La razón de cambio promedio existente entre la distancia y el tiempo es: 110km-10km = 100km
2hr-0hr= 2hr

$$\frac{\mathbf{100}\boldsymbol{km}}{\mathbf{2}\boldsymbol{h}} = \frac{\mathbf{50}\boldsymbol{km}}{\mathbf{1}\boldsymbol{h}}$$

Cada hora se recorren 50km

Para qué sirven las razones de cambio?

A través del estudio de los conceptos “razón de cambio promedio y razón de cambio instantáneo”, que son conceptos relativos a los cambios de una magnitud con respecto a otra, podremos resolver problemas que involucran el cambio de una población respecto al tiempo, el cambio de la temperatura de un líquido, el cambio de la distancia en relación con el tiempo, la velocidad respecto del tiempo, la producción en cierto tiempo, y muchas otras relaciones entre variables.

Definición: dada una función y = f (x), se llama razón de cambio promedio de y respecto a x, en el intervalo $[x_2 - x_1]$, al cociente entre el **cambio en el valor de y**: $(y_2 - y_1)$, **y cambio en x**: $(x_2 - x_1)$

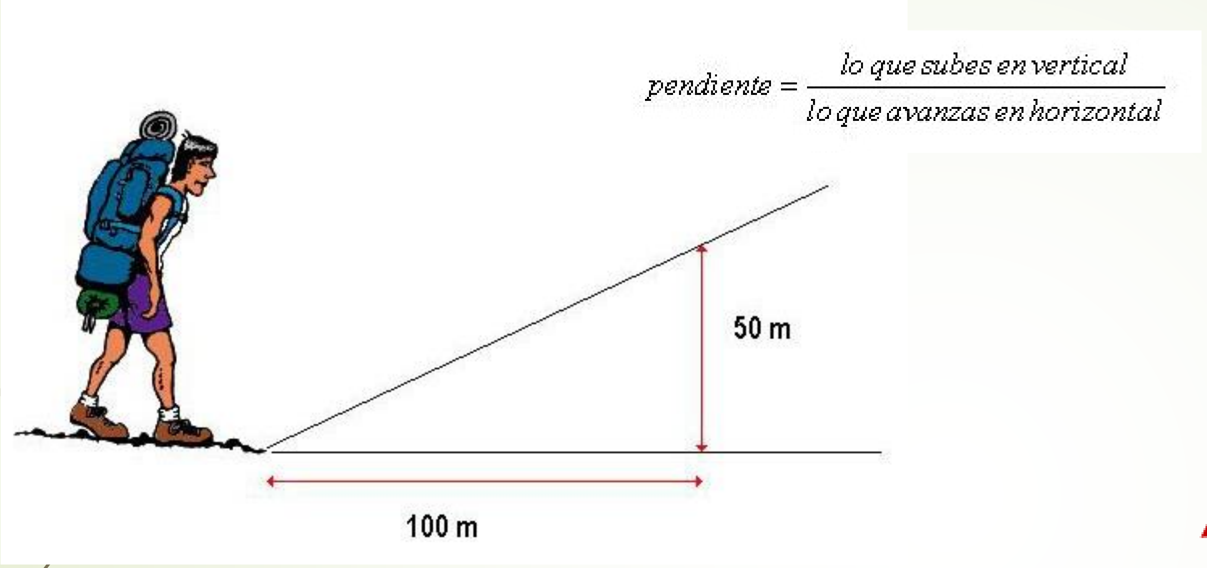
La razón de cambio promedio es:

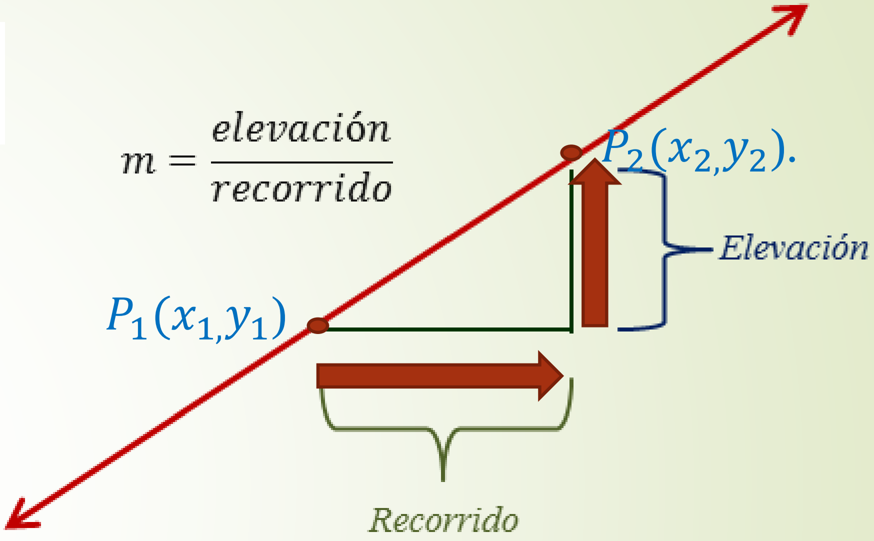
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Una razón de cambio muy común es la pendiente:

http://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/Maria_ElenaRUIZ_Raz%C3%B3n_de_Cambio.pdf

Pendiente de una recta

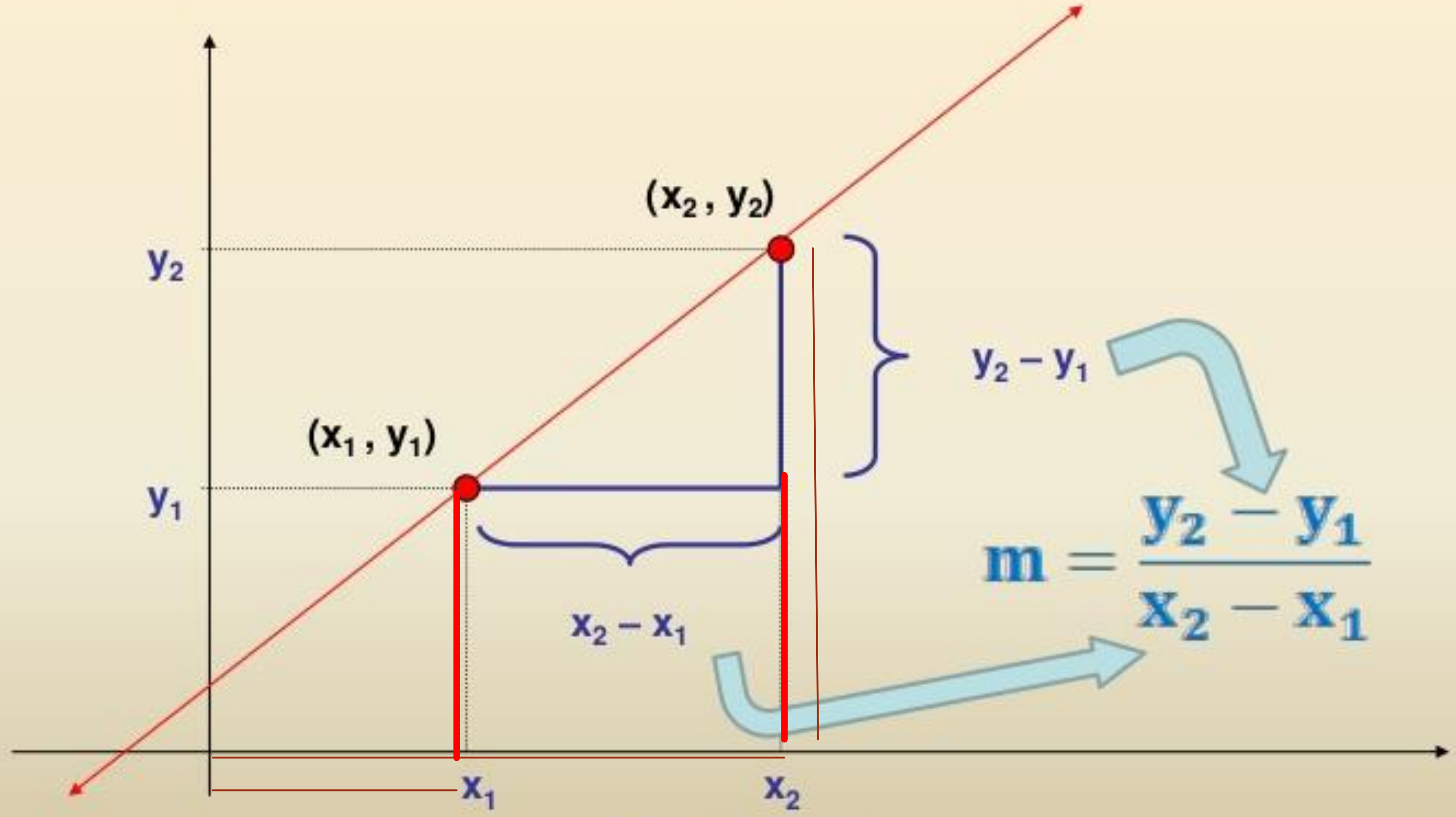




http://desenderismo.com/blogmaria/?page_id=379

- Primero comenzaremos con la pendiente de una recta. Lo cual es una manera de medir la "inclinación" de una recta, o cuál es la **rapidez con la que sube** (o baja) cuando pasamos de izquierda a derecha. Por cada x unidades que nos desplazamos a la derecha (recorrido), subimos (m +) (elevación) o bajamos (m -) y unidades.
- Se parte de dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

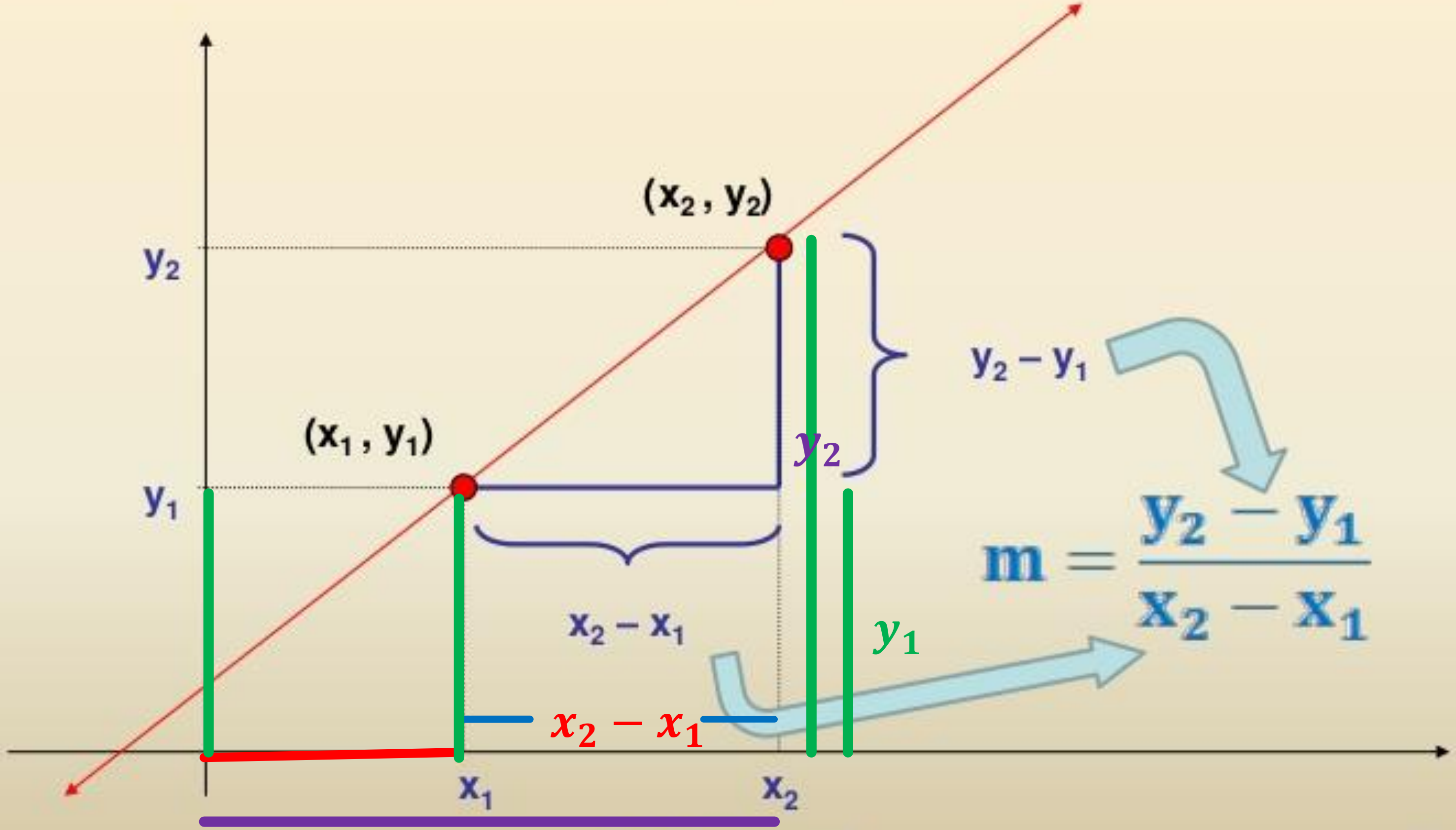
Cálculo de la pendiente de una recta



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

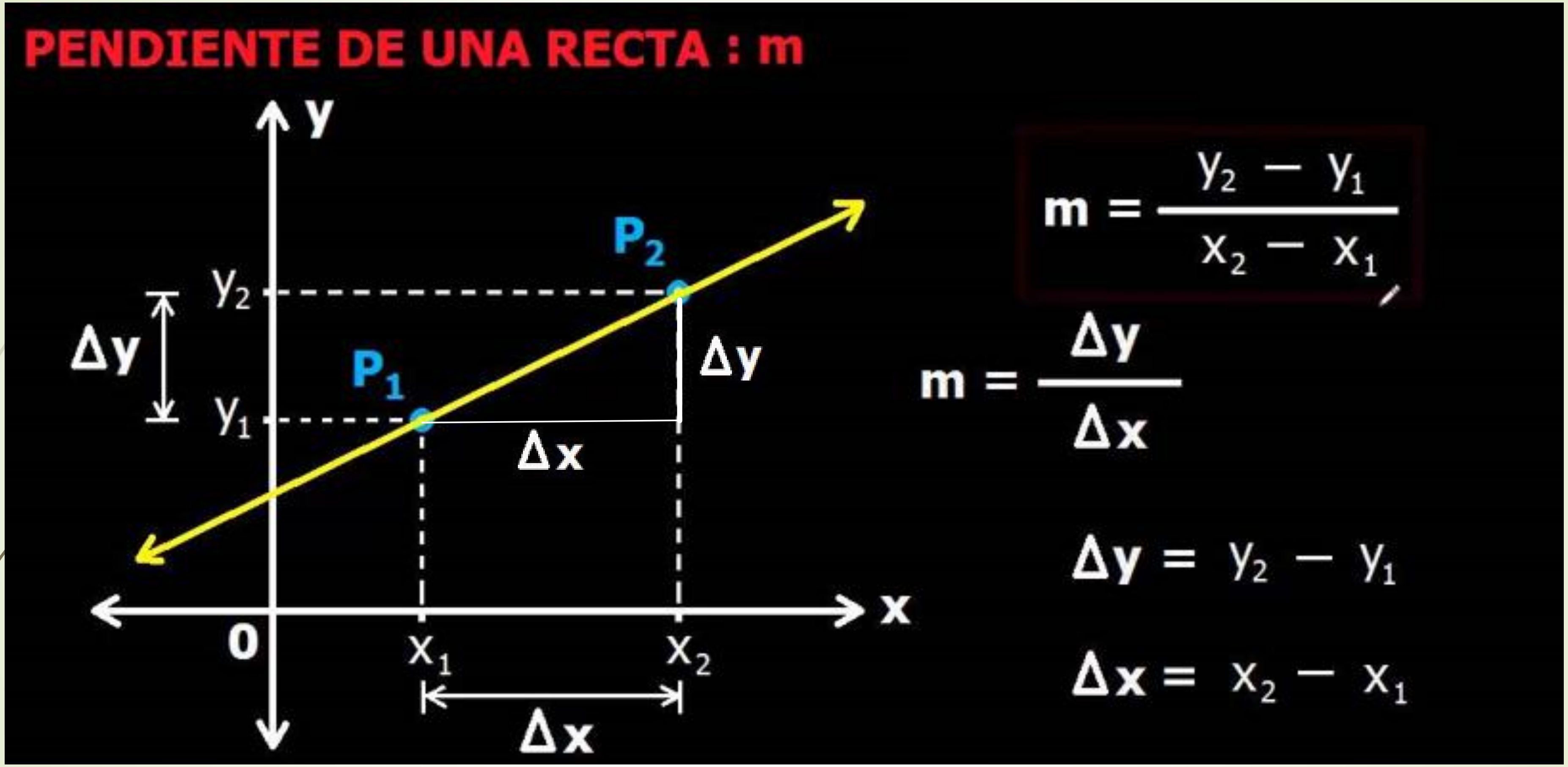
Prof. Mónica Lordi

Cálculo de la pendiente de una recta



Prof. Mónica Lordi 17

http://mastermatematico.blogspot.com.co/2015/10/pendiente-y-distancia-entre-dos-puntos.html



https://www.youtube.com/watch?v=xeZElTAyMOk

PENDIENTE DE UNA RECTA

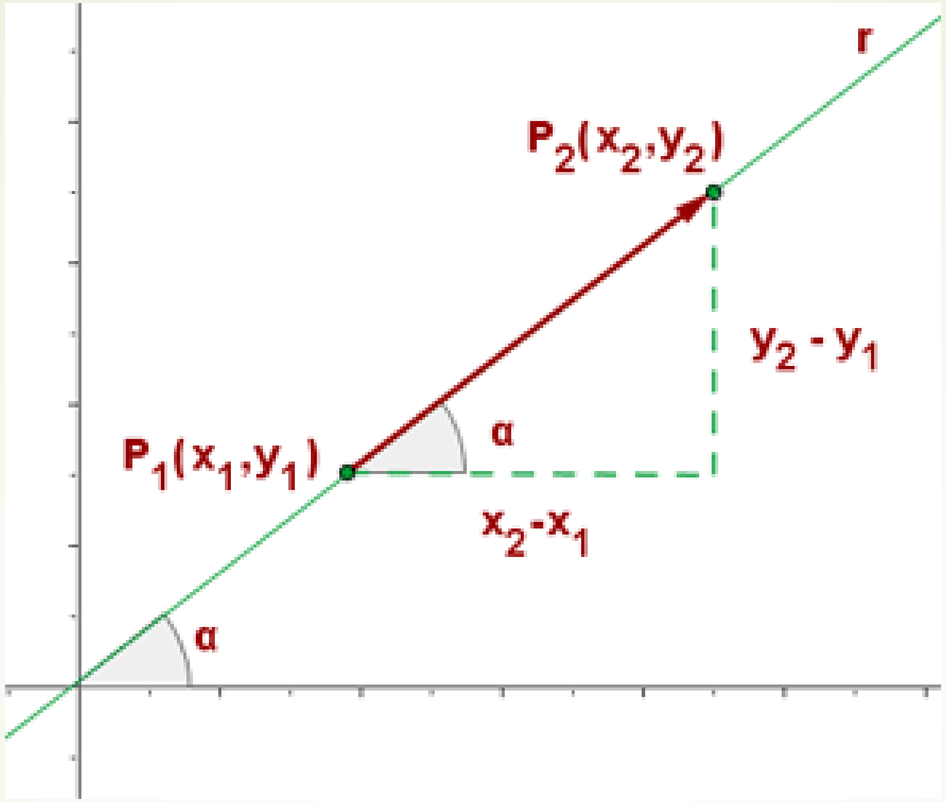
La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

La pendiente de una recta vertical no está definida.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \propto$$

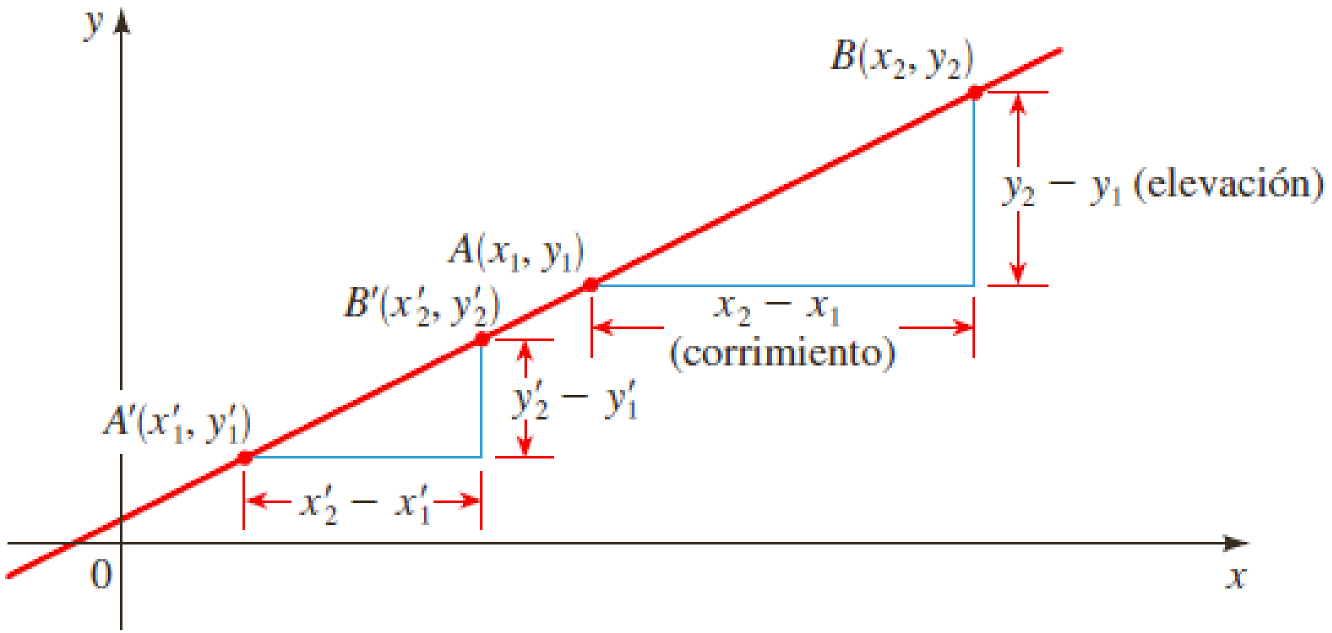
$$\propto = tan^{-1} \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)$$

- La **pendiente** de una recta también es la ta**ngente** del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje de abscisas

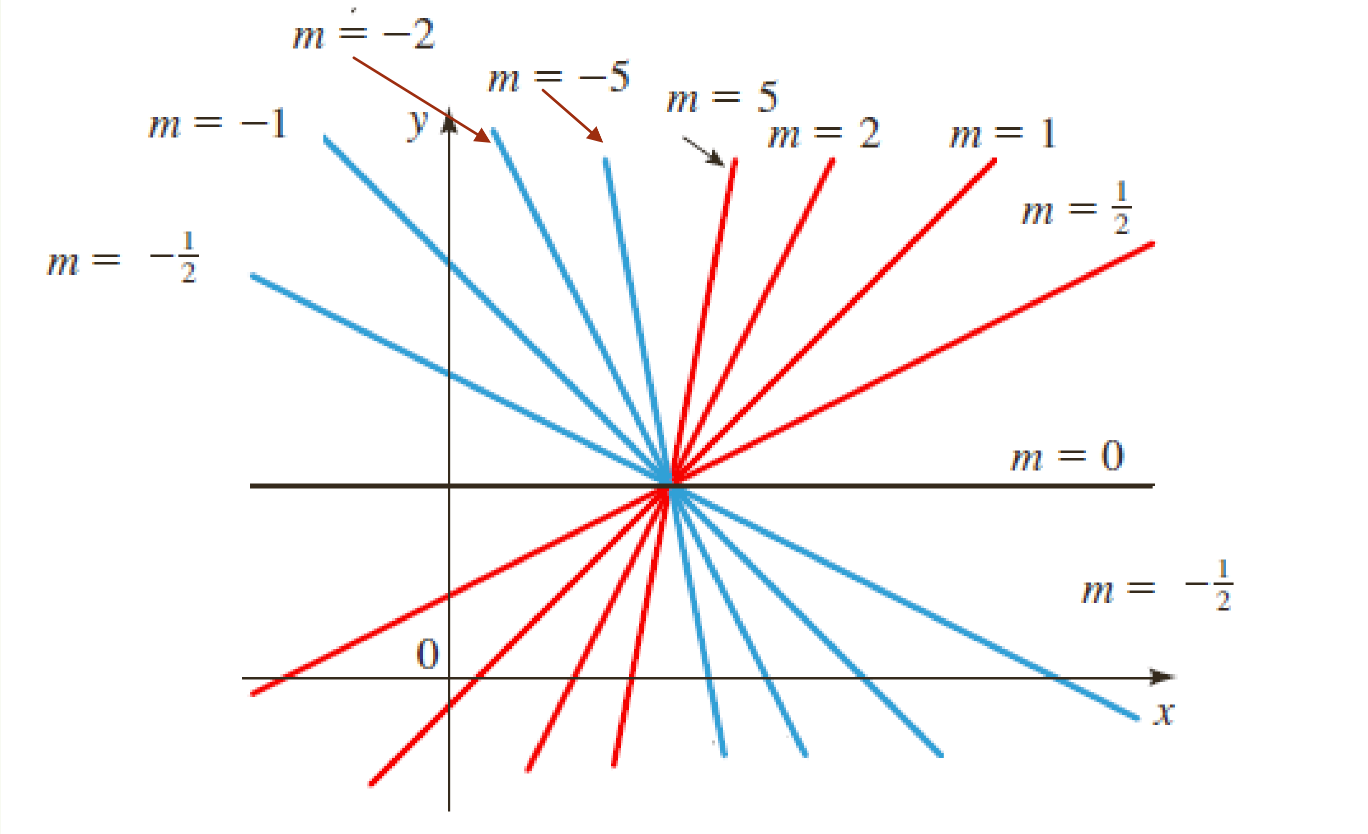
https://www.ditutor.com/funciones/pendiente-recta.html

La pendiente es independiente de cuáles dos puntos se escojan sobre la recta. Podemos ver que esto es verdadero en los triángulos semejantes de la Figura 3:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$



(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



- Las rectas con pendiente + se inclinan a la derecha.
- Las rectas con pendiente - se inclinan a la izquierda.
- Las rectas horizontales tienen pendiente 0.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

x_1, y_1 x_2, y_2

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

Dibujar la recta.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

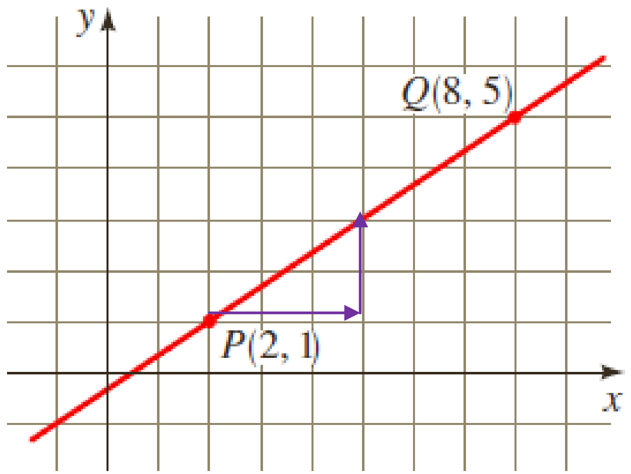


FIGURA 5

EJEMPLO 1 | Hallar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos

Encuentre la pendiente de la recta que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(8, 5)$.

SOLUCIÓN Dado que cualesquier dos puntos determinan una recta, sólo una recta pasa por estos dos puntos. De la definición, la pendiente es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{8 - 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

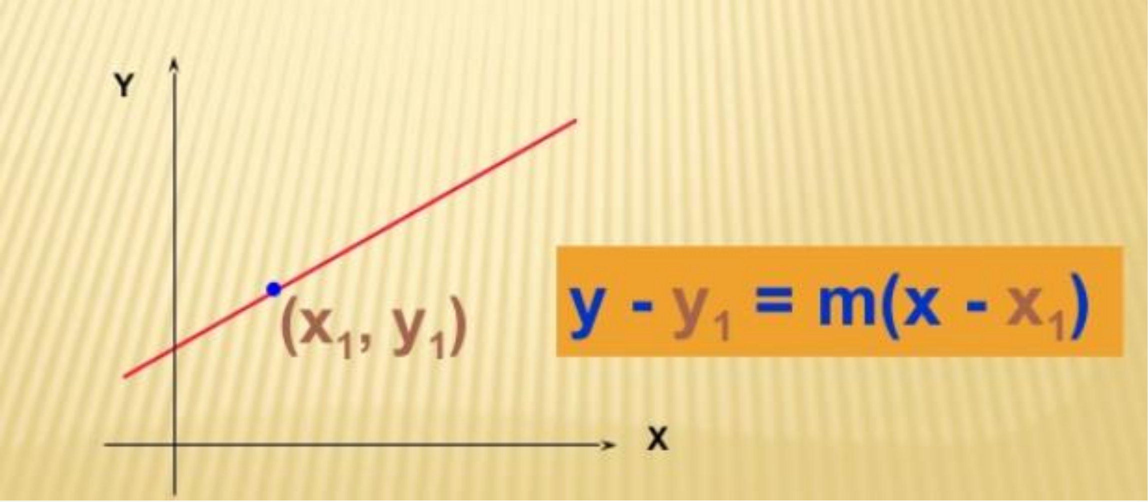
Esto nos dice que por cada 3 unidades que nos movemos a la derecha, la recta sube 2 unidades. La recta está trazada en la Figura 5.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuaciones de líneas rectas

De la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ podemos deducir la ecuación de la línea recta que pasa por un punto de coordenadas conocidas $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m:

Ecuación de la recta que pasa por un punto $P_1(x_1, y_1)$ y pendiente m



https://es.slideshare.net/yolandasarmiento/ecuacion-de-la-recta-16673959

LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Una ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) y tiene pendiente m es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m,$ generalizando uno de los puntos por (x,y)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | **Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados**

x_1, y_1 m=-1/2

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Trace la gráfica de la recta.

EJEMPLO 2 | Hallar la ecuación de una recta con punto y pendiente dados

(a) Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(1, -3)$ con pendiente $-\frac{1}{2}$.

(b) Trace la recta.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

SOLUCIÓN

(a) Usando la forma punto-pendiente con $m = -\frac{1}{2}$, $x_1 = 1$ y $y_1 = -3$, obtenemos la ecuación de la recta como

$$y + 3 = -\tfrac{1}{2}(x - 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{1}{2}, \text{ punto } (1, -3)$$

$$2y + 6 = -x + 1 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$x + 2y + 5 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

(b) El hecho de que la pendiente es $-\frac{1}{2}$ nos dice que cuando nos movemos 2 unidades a la derecha, la recta baja 1 unidad. Esto hace posible que tracemos la recta de la Figura 7.

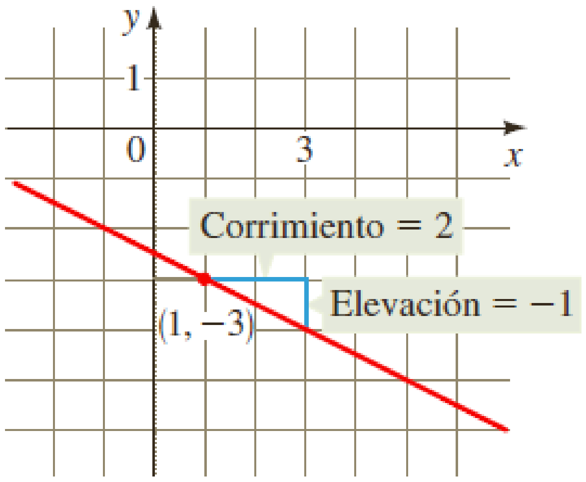


FIGURA 7

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

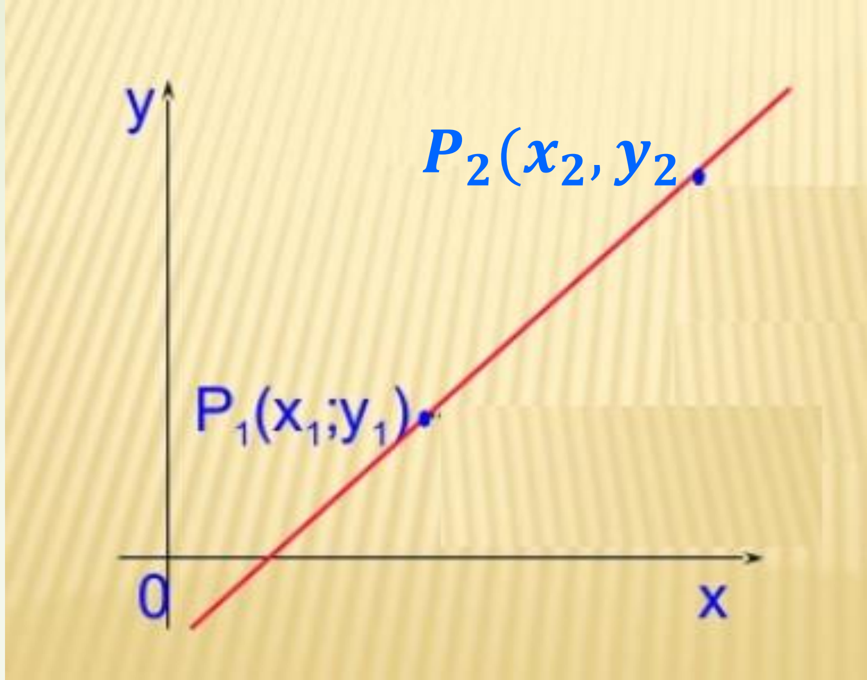
Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

A partir de la ecuación

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Y de la ecuación de la pendiente:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$



EJEMPLO 3 Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\underset{x_1, y_1}{(-1, 2)}$ y $\underset{x_2, y_2}{(3, -4)}$.

EJEMPLO 3 | Hallar la ecuación de una recta que pase por dos puntos determinados

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(3, -4)$.

SOLUCIÓN La pendiente de la recta es

$$m = \frac{-4 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

Usando la forma punto-pendiente con $x_1 = -1$ y $y_1 = 2$, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{3}{2}(x + 1) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{3}{2}, \text{ punto } (-1, 2)$$

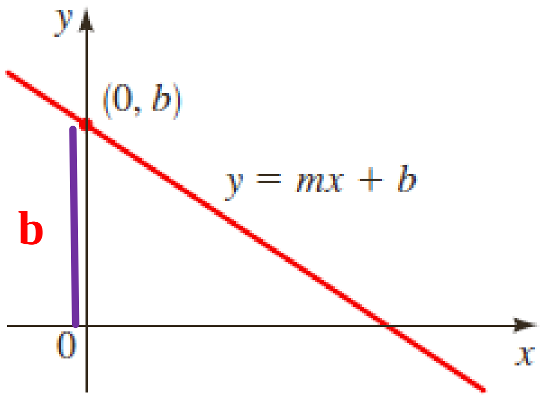
$$2y - 4 = -3x - 3 \qquad \text{Multiplique por 2}$$

$$3x + 2y - 1 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de la línea recta con pendiente m e intercepción b en el con el eje y

$$y = mx + b$$



Una ecuación de la recta que tiene pendiente m y punto de intersección b en el eje y es

$$y = mx + b$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección y de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección y de la recta $3y - 2x = 1$.

EJEMPLO 4 | Rectas en forma de pendiente e intersección

(a) Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 e intersección *y* de -2.

(b) Encuentre la pendiente e intersección *y* de la recta $3y - 2x = 1$.

SOLUCIÓN

(a) Como $m = 3$ y $b = -2$, de la forma de pendiente-punto de intersección de la ecuación de una recta obtenemos

$$y = 3x - 2$$

(b) Primero escribimos la ecuación en la forma $y = mx + b$:

$$3y - 2x = 1$$

$$3y = 2x + 1 \qquad \text{Sume } 2x$$

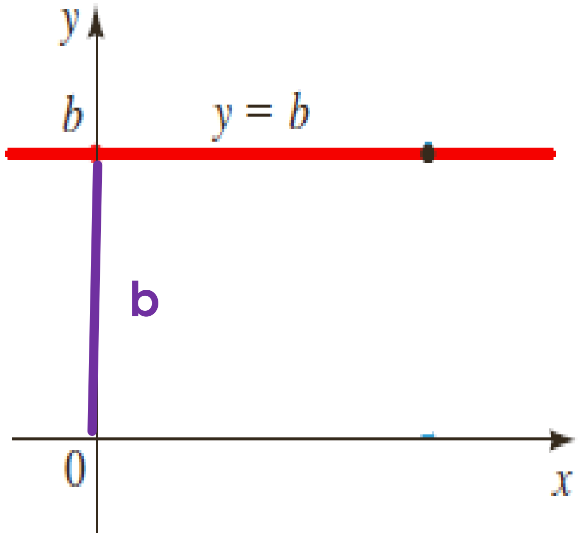
$$y = \tfrac{2}{3}x + \tfrac{1}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

De la forma pendiente-intersección de la ecuación de una recta, vemos que la pendiente es $m = \frac{2}{3}$ y la intersección en el eje *y* es $b = \frac{1}{3}$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de una recta paralela al eje x: y=b
Ecuación del eje x: $y = 0$

- Si una recta es horizontal su pendiente es 0.
- Así: $y = mx + b$ $\quad y = 0x + b$ $\quad y = b$



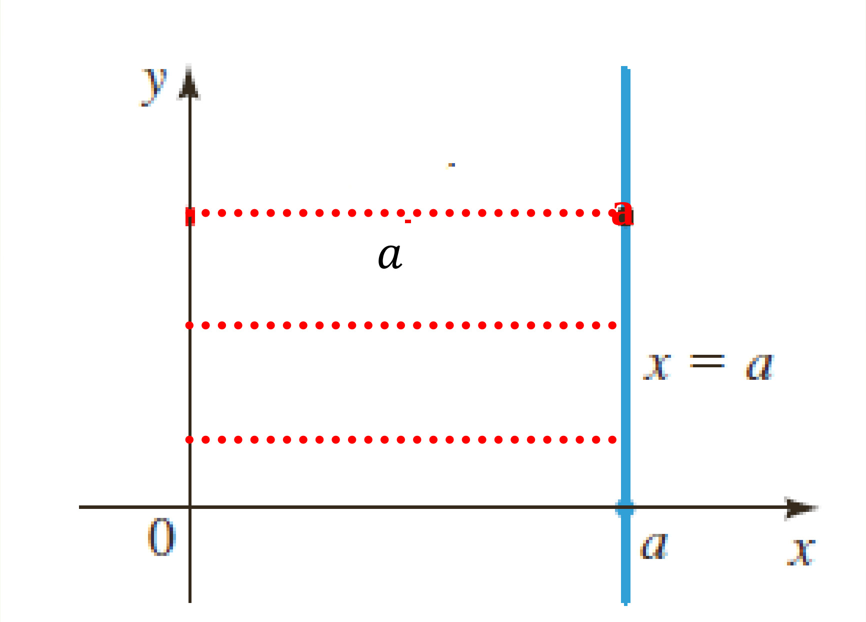
Rectas verticales y horizontales

Si una recta es horizontal, su pendiente es $m = 0$, de modo que su ecuación es $y = b$, donde b es el punto de intersección con el eje y (vea Figura 9). Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de una recta paralela al eje y: x=a

Ecuación del eje y: x = 0



Rectas verticales

Una recta vertical no tiene pendiente, pero podemos escribir su ecuación como $x = a$, donde a es el punto de intersección con el eje x, porque la coordenada x de todo punto en la recta es a.

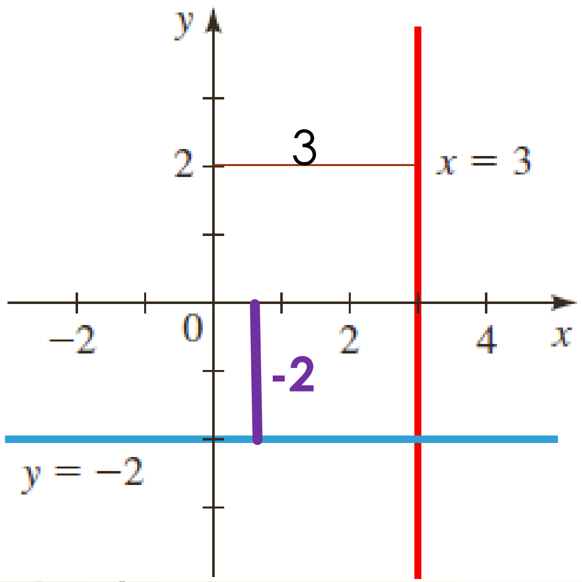
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

RECTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

Una ecuación de la recta vertical que pasa por (a, b) es $x = a$.

Una ecuación de la recta horizontal que pasa por (a, b) es $y = b$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



EJEMPLO 5 | Rectas verticales y horizontales

(a) Una ecuación para la recta vertical que pasa por (3, 5) es $x = 3$.

(b) La gráfica de la ecuación $x = 3$ es una recta vertical con intersección 3 en el eje x.

(c) Una ecuación para la recta horizontal que pasa por $(8, -2)$ es $y = -2$.

(d) La gráfica de la ecuación $y = -2$ es una recta horizontal con intersección -2 en el eje y.

Las rectas están graficadas en la Figura 10.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EUCACIÓN GENERAL DE UNA RECTA

La gráfica de toda **ecuación lineal**

$$Ax + By + C = 0 \qquad (A, B \text{ no son cero ambas})$$

es una recta. A la inversa, toda recta es la gráfica de una ecuación lineal.

▼ Ecuación general de una recta

Una **ecuación lineal** es una ecuación de la forma

$$Ax + By + C = 0$$

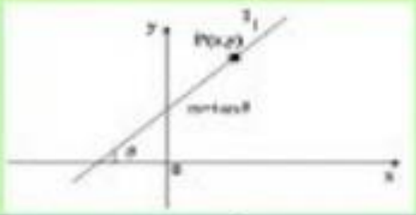
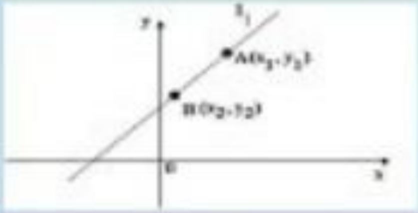
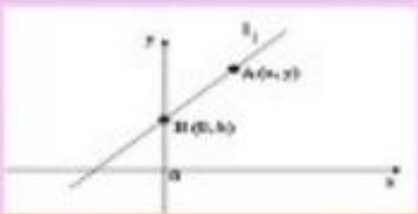
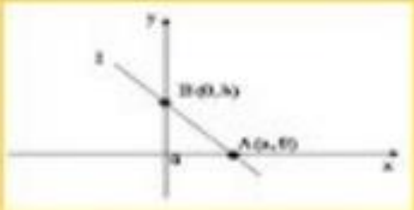
donde A, B y C son constantes y A y B no son 0 ambas. La ecuación de una recta es una ecuación lineal:

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ecuación de la recta que intercepta al eje y en b y al eje x en a

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA

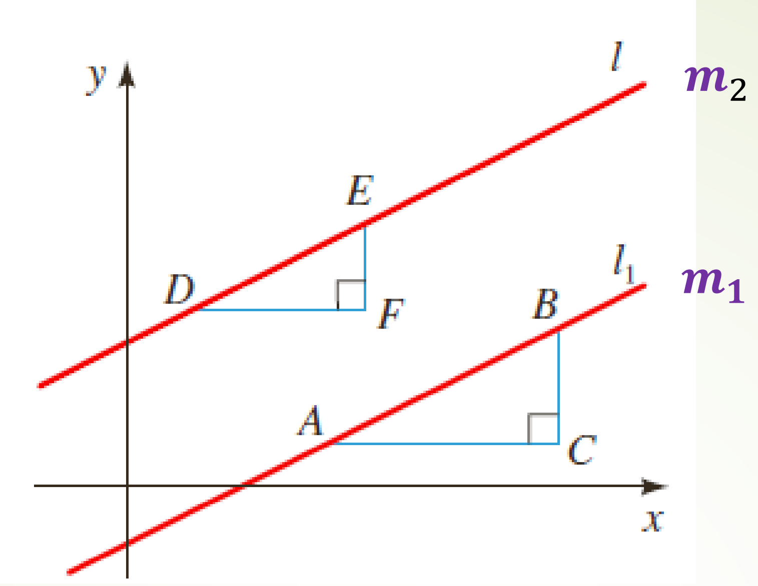
ECUACION GENERAL DE LA RECTA:		$A_X + B_Y + C = 0$
1.- PUNTO - PENDIENTE		$(y - y_1) = m(x - x_1)$
2.- DADO DOS PUNTOS		$(y - y_1) = \left[\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right](x - x_1)$
3.- INTERCEPTO EN EJE "Y"		$y = mx + b$
4.- SIMETRICA		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ MATEMATICA_EDKEN

https://es.slideshare.net/jcaicedo14/ecuacion-de-la-recta-pendiente

Ubique los puntos en el plano y determine la pendiente de estos segmentos:

1. A(-6; 1) y B(1; 2)
2. C(-1; 4) y D(3; 1)
3. E(3; 2) y F(8; 2)
4. G(2; 1) y H(2; -3)

Halle la ecuación en cada caso mediante $y = mx + b$



$$m_1 = m_2$$

Rectas paralelas y perpendiculares

Como la pendiente mide la inclinación de una recta, parece razonable que las rectas paralelas deban tener la misma pendiente. De hecho, podemos demostrar esto.

RECTAS PARALELAS

Dos rectas no verticales son paralelas si y sólo si tienen la misma pendiente.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 2)$ que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

EJEMPLO 7 | Hallar la ecuación de una recta paralela a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (5, 2) que es paralela a la recta $4x + 6y + 5 = 0$.

SOLUCIÓN Primero escribimos la ecuación de la recta dada en forma de pendiente-intersección.

$$4x + 6y + 5 = 0$$

$$6y = -4x - 5 \qquad \text{Reste } 4x + 5$$

$$y = -\tfrac{2}{3}x - \tfrac{5}{6} \qquad \text{Divida entre 6}$$

Por lo tanto, la recta tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. Como la recta requerida es paralela a la recta dada, también tiene pendiente $m = -\frac{2}{3}$. De la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta, obtenemos

$$y - 2 = -\tfrac{2}{3}(x - 5) \qquad \text{Pendiente } m = -\tfrac{2}{3}, \text{ punto } (5, 2)$$

$$3y - 6 = -2x + 10 \qquad \text{Multiplique por 3}$$

$$2x + 3y - 16 = 0 \qquad \text{Reacomode}$$

Por lo tanto, la ecuación de la recta requerida es $2x + 3y - 16 = 0$.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

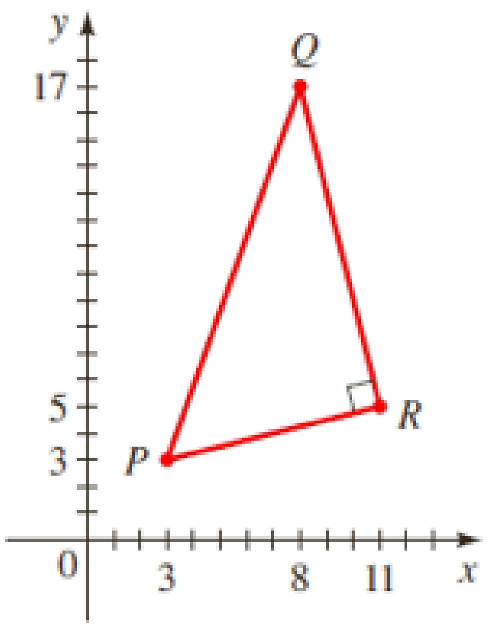
RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas con pendientes m_1 y m_2 son perpendiculares si y sólo si $m_1 m_2 = -1$, es decir, sus pendientes son recíprocas negativas:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \qquad m_1 m_2 = -1$$

También, una recta horizontal (pendiente 0) es perpendicular a una recta vertical (sin pendiente).

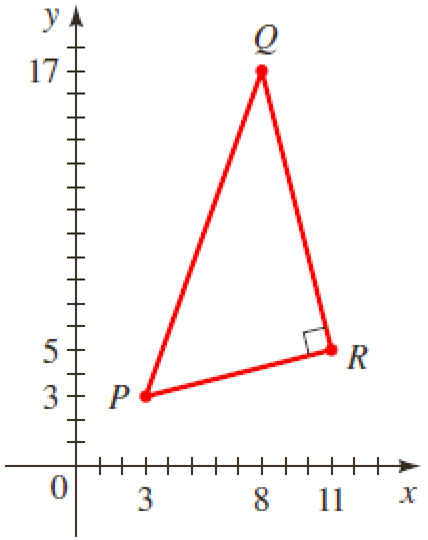
(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



EJEMPLO | Rectas p

FIGURA 15

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.



EJEMPLO 8 | Rectas p **FIGURA 15**

Demuestre que los puntos $P(3, 3)$, $Q(8, 17)$ y $R(11, 5)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN Las pendientes de las rectas que contienen a PR y QR son, respectivamente,

$$m_1 = \frac{5 - 3}{11 - 3} = \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad m_2 = \frac{5 - 17}{11 - 8} = -4$$

Como $m_1 m_2 = -1$, estas rectas son perpendiculares, de modo que PQR es un triángulo rectángulo que aparece en la Figura 15.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen. Origen: P(0,0)

EJEMPLO 9 | Hallar una ecuación de una recta perpendicular a una recta dada

Encuentre la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta $4x + 6y + 5 = 0$ y pasa por el origen.

SOLUCIÓN En el Ejemplo 7 encontramos que la pendiente de la recta $4x + 6y + 5 = 0$ es $-\frac{2}{3}$. Entonces, la pendiente de una recta perpendicular es el recíproco negativo, es decir, $\frac{3}{2}$. Como la recta pedida pasa por (0, 0), la forma punto-pendiente da

$$y - 0 = \tfrac{3}{2}(x - 0) \qquad \text{Pendiente } m = \tfrac{3}{2}\text{, punto } (0, 0)$$

$$y = \tfrac{3}{2}x \qquad \text{Simplifique}$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Rapidez o velocidad de cambio de una variable con respecto a otra

Modelado con ecuaciones lineales: pendiente como rapidez de cambio

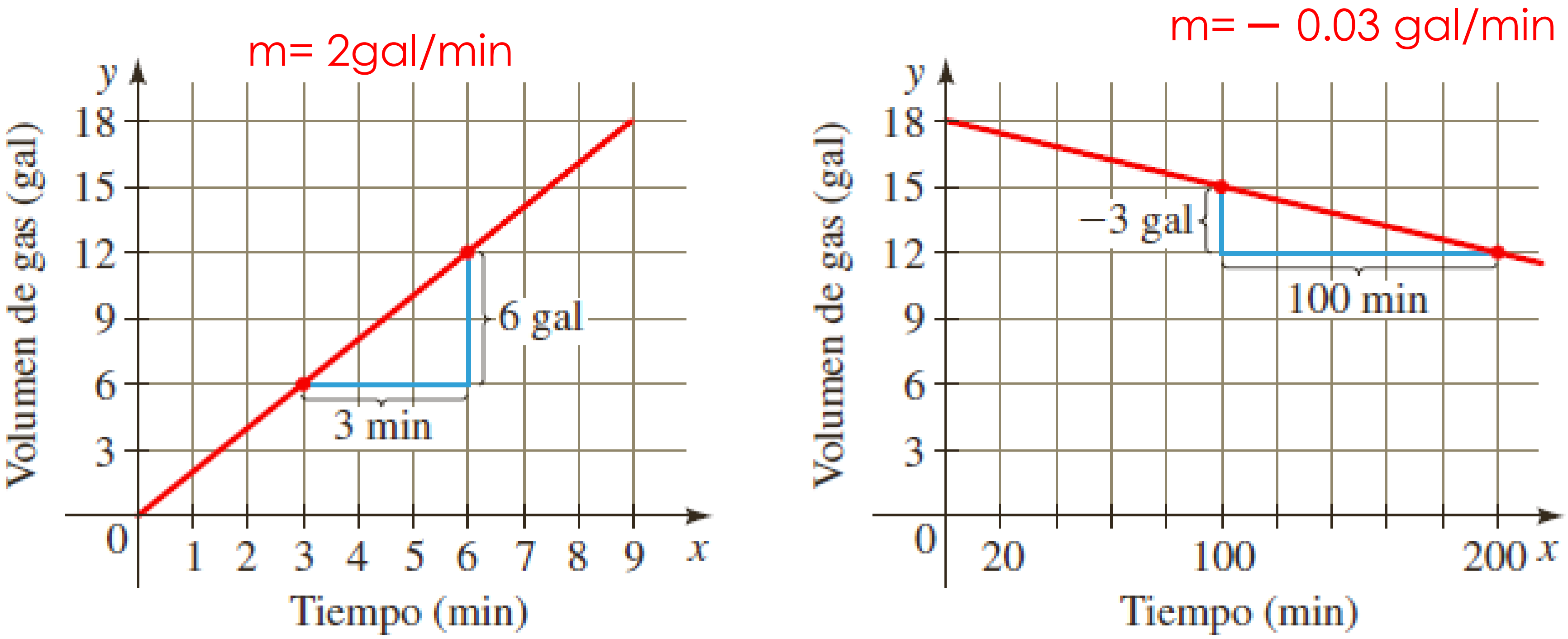
Cuando se usa una recta para modelar la relación entre dos cantidades, la pendiente de la recta es la **rapidez de cambio** de una cantidad con respecto a la otra. Por ejemplo, la gráfica de la Figura 17(a) en la página siguiente da la cantidad de gas en un tanque que se está llenando. La pendiente entre los puntos indicados es

$$m = \frac{6 \text{ galones}}{3 \text{ minutos}} = 2 \text{ gal/min}$$

Cada minuto entran dos galones de gas al tanque.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

La pendiente es la *rapidez* a la que se está llenando el tanque, 2 galones por minuto. En la Figura 17(b) el tanque se está drenando con una *rapidez* de 0.03 galones por minuto y la pendiente es -0.03.



(a) Tanque llenado a 2 gal/min
La pendiente de la recta es 2

(b) Tanque drenado a 0.03 gal/min
La pendiente de la recta es -0.03

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

- Una recta no vertical tiene la ecuación $y = mx + b$ o $-mx + y - b = 0$, que es una ecuación lineal con $A = -m$, $B = 1$ y $C = -b$.
- Una recta vertical tiene la ecuación $x = a$ o $x - a = 0$, que es una ecuación lineal con $A = 1$, $B = 0$ y $C = -a$.

A la inversa, la gráfica de una ecuación lineal es una recta.

- Si $B \neq 0$, la ecuación se convierte en

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad \text{Divida por } B$$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

y ésta es la forma de pendiente-intersección de la ecuación de una recta (con $m = -A/B$ y $b = -C/B$).

- Si $B = 0$, la ecuación se convierte en

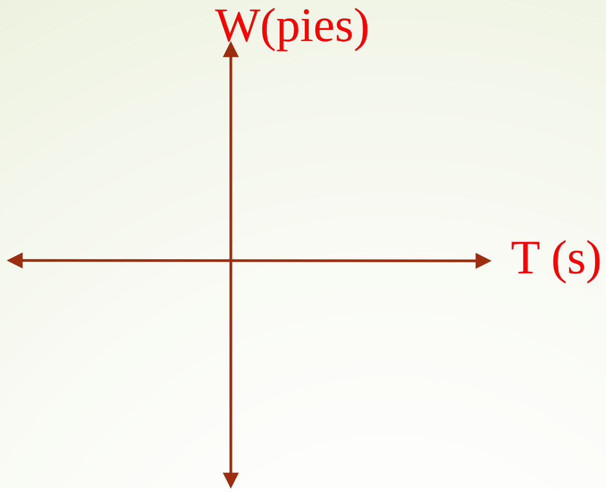
$$Ax + C = 0 \qquad \text{Haga } B = 0$$

o $x = -C/A$, que representa una recta vertical.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Ejercicios de aplicación práctica de ecuaciones lineales

- Las ecuaciones lineales permiten modelar muchas situaciones prácticas de la vida real.
- Analice profundamente los siguientes problemas. Son muy común en los exámenes.



EJEMPLO 11 | Pendiente como rapidez de cambio

Una presa se construye en un río para crear un estanque. El nivel de agua w del estanque está dado por la ecuación lineal

$w \longrightarrow y$

$t \longrightarrow x$

$y = 4.5x + 28$

$$w = 4.5t + 28$$

W es la altura de represa

donde t es el número de años desde que se construyó la presa y w se mide en pies.

(a) Trace la gráfica de esta ecuación.

(b) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección w de esta gráfica?

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Esta ecuación tiene la forma general $y = mx + b$ $\longrightarrow y = 4.5x + 28$

de donde m=4.5 y el intercepto b sobre el eje y es 28: corresponde al punto (0,28).
Como la pendiente es +, va inclinada hacia la derecha.
Faltaría hallar otro punto, podría ser el intercepto sobre el eje x, que se hallaría simplemente haciendo $y = 0$ ó $w = 0$ en la ecuación.

$$w = 4.5t + 28$$
$$0 = 4.5t + 28$$
$$-28 = 4.5t$$
$$-\frac{28}{4.5} = t = -6.2$$

Lo que significa que la recta corta al eje x en el punto (-6.2, 0). P_1((0,28), P_2((6.2, 0). Con estos dos puntos se puede trazar la gráfica.
Las unidades de la pendiente son: 4.5 $\frac{pies}{1\ año}$, lo que significa que cada año el agua aumenta o sube 4.5 pies.

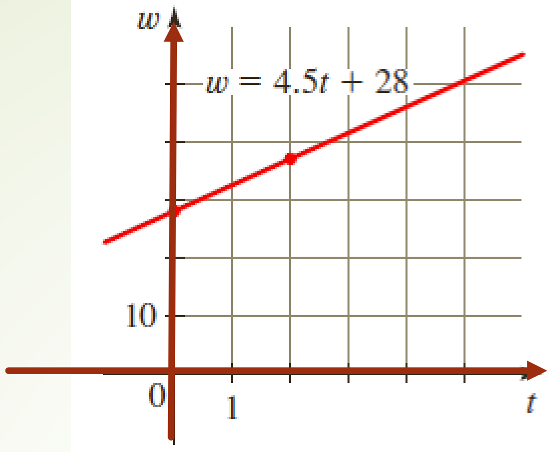


FIGURA 18

SOLUCIÓN

(a) Esta ecuación es lineal, por lo que su gráfica es una recta. Como dos puntos determinan una recta, localizamos dos puntos que estén sobre la gráfica y trazamos una recta que pase por ellos.

Cuando $t = 0$, entonces $w = 4.5(0) + 28 = 28$, por lo que $(0, 28)$ está sobre la recta.

Cuando $t = 2$, entonces $w = 4.5(2) + 28 = 37$, por lo que $(2, 37)$ está sobre la recta.

La recta determinada por esos puntos se muestra en la figura 18.

(b) La pendiente es $m = 4.5$; representa la rapidez de cambio del nivel de agua con respecto al tiempo. Esto significa que el nivel de agua *aumenta* 4.5 pies por año. El punto de intersección w es 28 y se presenta cuando $t = 0$, por lo que representa el nivel de agua cuando la presa se construyó. Es el nivel del agua inicial.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

EJEMPLO 12 | Relación lineal entre temperatura y elevación

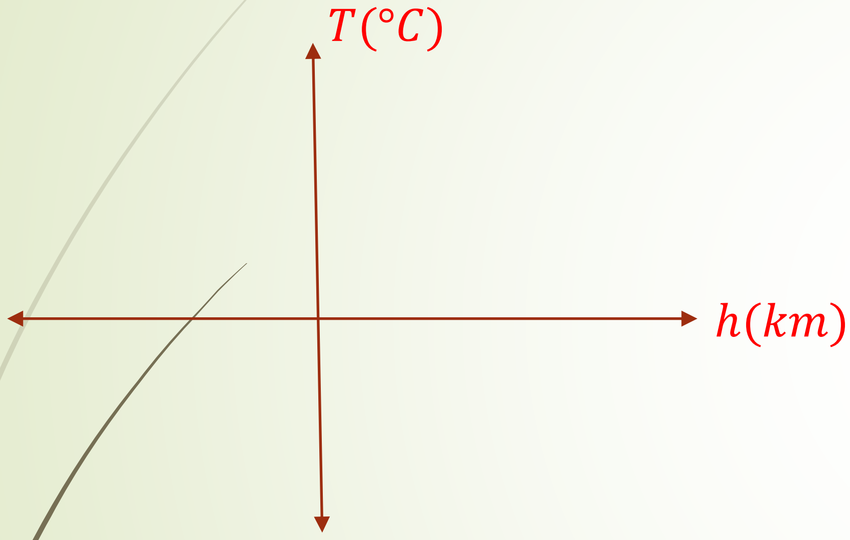
(a) A medida que el aire seco sube, se dilata y se enfría. Si la temperatura al nivel del suelo es de 20°C y la temperatura a una altitud de 1 km es 10°C, exprese la temperatura *T* (en °C) en términos de la altitud *h* (en km). (Suponga que la relación entre *T* y *H* es lineal.) Se trata de hallar la ecuación lineal entre T y H.

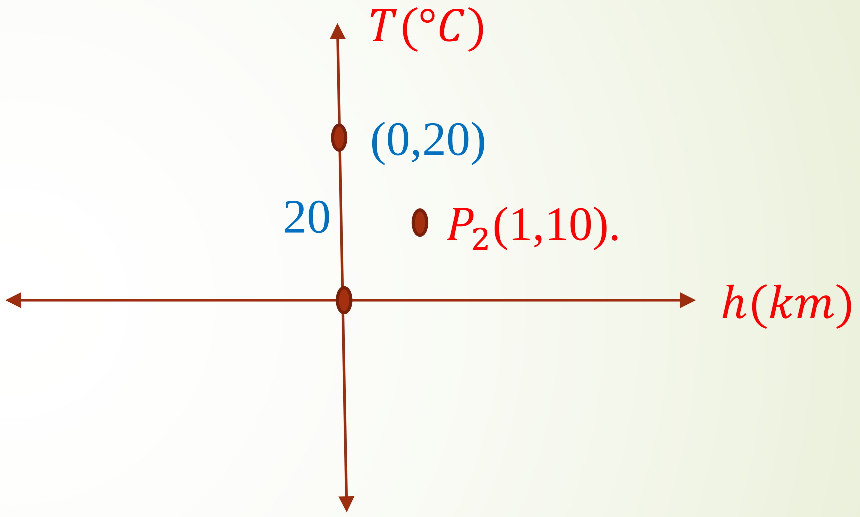
(b) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa su pendiente?

(c) ¿Cuál es la temperatura a una altitud de 2.5 km?

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Si la temperatura es la variable dependiente (eje y) y la altura la independiente (eje x), los ejes de coordenadas quedarán así:



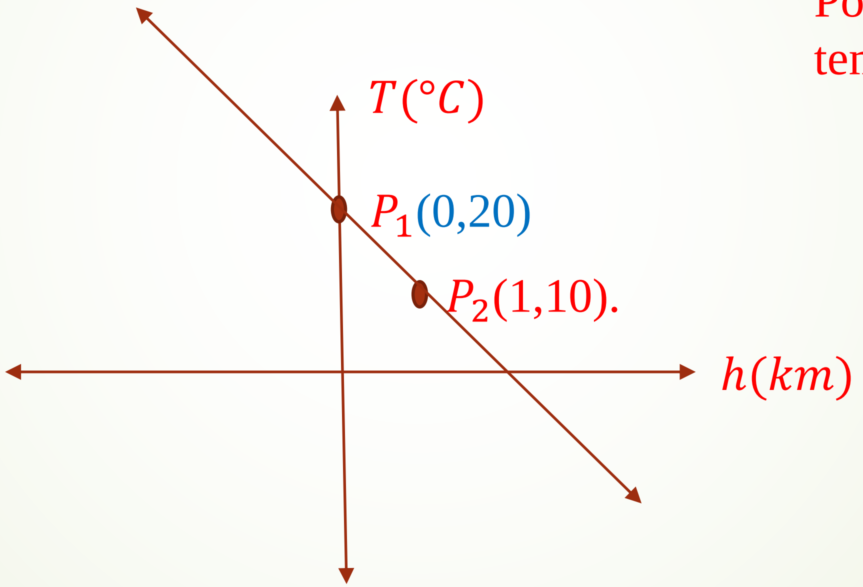


Mirando el eje de coordenadas, <u>la temperatura a nivel del suelo significa</u>: cuando la altura es 0 la temperatura es 20°C, o sea, el punto $P_1(0,20)$ es el intercepto sobre el eje y, b=20.
La temperatura a 1 km de altura es de 10°C, es otro punto: $P_2(1,10)$.

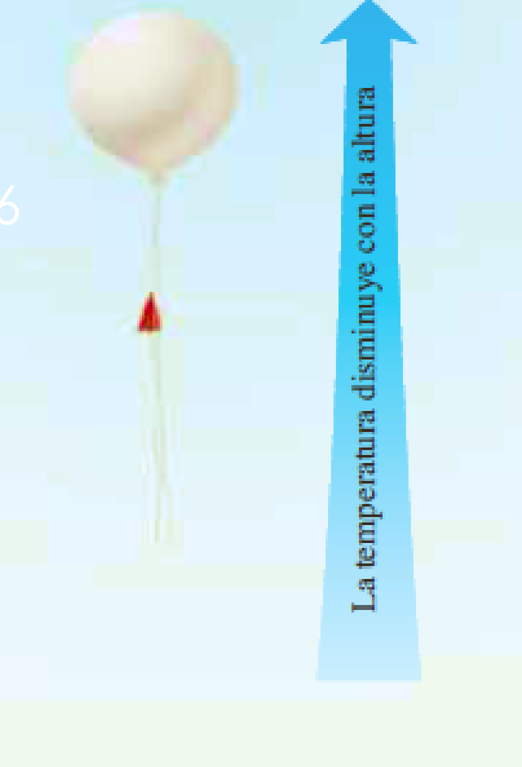
Se tienen dos puntos de la recta, por tanto se puede determinar la gráfica, la pendiente y la ecuación.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10-20}{1-0} = -10\,\frac{°C}{1\ km}$$

Recta inclinada hacia la izquierda. Por cada kilómetro que se sube, la temperatura disminuye 10°C.



$$y = mx + b \longrightarrow T = mx + b \longrightarrow T = -10x + 20$$



SOLUCIÓN

(a) Como estamos suponiendo una relación lineal entre T y h, la ecuación debe ser de la forma

$$T = mh + b$$

donde m y b son constantes. Cuando $h = 0$, nos dicen que $T = 20$, de modo que

$$20 = m(0) + b$$
$$b = 20$$

Por lo tanto, tenemos

$$T = mh + 20$$

Cuando $h = 1$, tenemos $T = 10$ y entonces

$$10 = m(1) + 20$$
$$m = 10 - 20 = -10$$

La expresión requerida es

$$T = -10h + 20$$

(b) La gráfica está trazada en la Figura 19. La pendiente es $m = -10$ºC/km, y ésta representa la rapidez de cambio de temperatura con respecto a la distancia arriba del suelo. En consecuencia, la temperatura *disminuye* 10ºC por kilómetro de altitud.

(c) A una altitud de $h = 2.5$ km la temperatura es

$$T = -10(2.5) + 20 = -25 + 20 = -5\,°\mathrm{C}$$

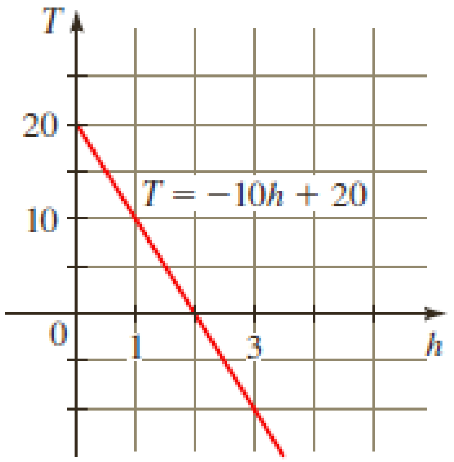


FIGURA 19

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Costo de conducir un auto El costo mensual de conducir un auto depende del número de millas recorridas. Lynn encontró que en mayo su costo de conducción fue de \$380 por 480 millas y, en junio, su costo fue de \$460 por 800 millas. Suponga que hay una relación lineal entre el costo mensual C de conducir un auto y la distancia recorrida d. C variable dependiente, d independiente

(a) Encuentre una ecuación lineal que relacione C y d.

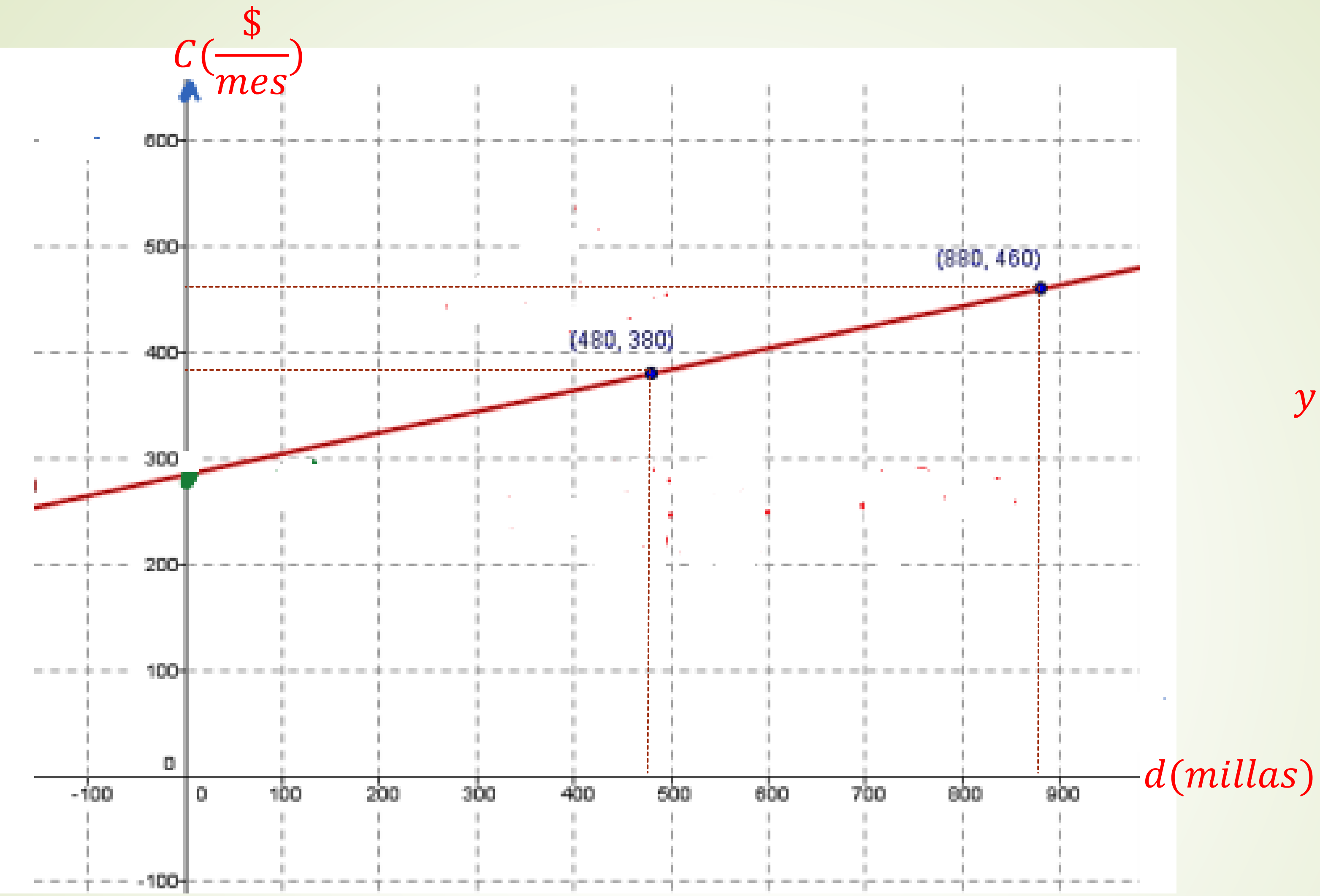
(b) Use la parte (a) para predecir el costo de conducir 1500 millas por mes.

(c) Trace la gráfica de la ecuación lineal. ¿Qué representa la pendiente de la recta?

(d) ¿Qué representa el punto de intersección y de la gráfica?

(e) ¿Por qué una relación lineal es un modelo apropiado para esta situación?

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



$m = ?$

$y = mx + b = ?$

Cuando nos dicen que el costo de conducir 380 millas es $480 para cierto mes, nos están dando un punto de la recta, y lo mismo para 880 millas y $460. Tenemos por tanto, dos puntos, con estos podemos encontrar los otros puntos pedidos.

Estudie y entienda el siguiente ejercicio

En la superficie la presión es de 1atm = 15lb $/pul^2$

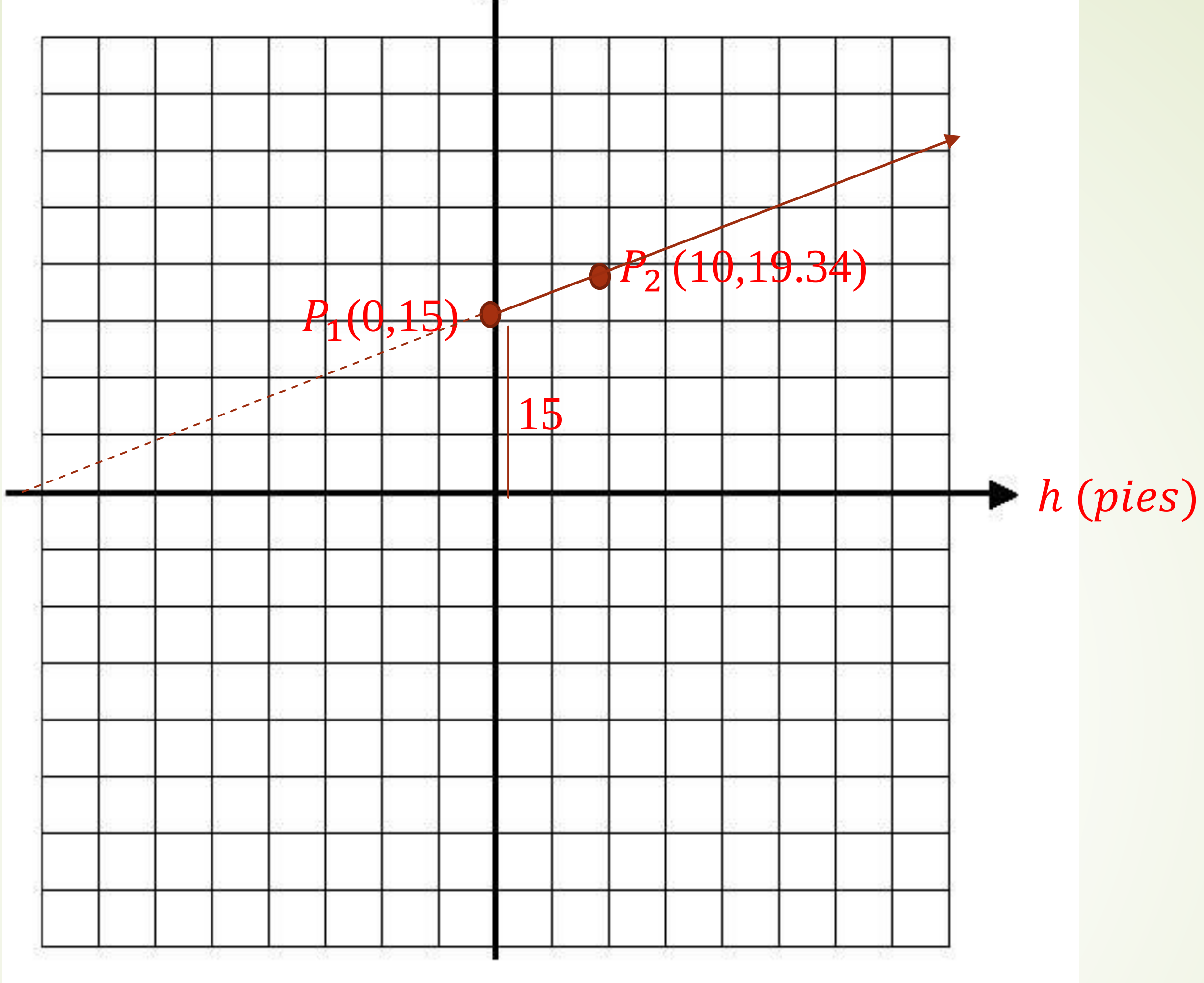
73. Presión y profundidad En la superficie del océano, la presión del agua es la misma que la del aire que está sobre el agua, 15 lb/pulg.^{2}. Debajo de la superficie, la presión del agua aumenta en 4.34 lb/pulg.^{2} por cada 10 pies de descenso.

(a) Encuentre una ecuación para la relación entre presión y profundidad debajo de la superficie del océano.

(b) Trace una gráfica de esta ecuación lineal.

(c) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección y de la gráfica?

(d) ¿A qué profundidad es de 100 lb/pulg.^{2} la presión?



Mirando el eje de coordenadas, cuando se está a una profundidad de 0 (superficie), la presión es $15\text{lb}\,/pul^2$, o sea, el punto $P_1(0,15)$ es el intercepto sobre el eje y, b=15. Cada 10 pies hacia abajo la presión aumenta $4.34\text{ lb}\,/pul^2$, por tanto, a 10 pies de profundidad se tendrá una presión de 15 + 4.34= $19.34\text{ lb}\,/pul^2$

$$\overset{x_1 \quad y_1}{P_1(0,15)} \qquad \overset{x_2 \qquad y_2}{P_2\,(10,\ 19.34)}$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19.34-15}{10-0} = 0.434\,\frac{lbs/pul^2}{1pie}$$

$$p = 0.434h + 15$$

La pendiente m: por cada pie que se baja, la presión aumenta 0.434 lbs.
Como ya se dijo, el significado de la intersección con el eje vertical, es que a nivel de la superficie del agua, la presión es de 4,34$\frac{lbs}{pul^2}$ $(1atm)$, es una presión inicial superficial.

La intersección con el eje x no tiene sentido real, porque sería hacia arriba (en el aire o atmósfera) y allí ya no vale el aumento de 4,34 lbs /$pulg^2$ cada 10 pies.

Para 100 lbs /$pulg^2$, cuál es la profundidad?

$$p = 0.434h + 15$$

$$100 \text{ lbs } /pulg^2 = 0.434h + 15$$

$$100 - 15 = 0.434h$$

$$h = \frac{85}{0.434} = 195.8\, pies$$

Calentamiento global Algunos científicos piensan que el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra ha estado subiendo constantemente. El promedio de la temperatura de la superficie se puede modelar con

$$T = 0.02t + 15.0$$

donde T es la temperatura en ºC y t es años desde 1950.

(a) ¿Qué representan la pendiente y el punto de intersección T?

(b) Use la ecuación para pronosticar el promedio de la temperatura de la superficie de la Tierra en 2050.

La ley de Boyle para los gases afirma que PV= c , donde P denota la presión, V el volumen y c es una constante. Suponga que después de un tiempo t (en minutos) la presión está dada por P(en $gm/cm2$) $= 2t + 20$ y que el volumen V en $t = 0$ es de 60 $cm3$. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo en $t = 5$.

El voltaje v (en voltios), la corriente I (en Amperios) y la resistencia R (en Ohms) de un circuito eléctrico están relacionados mediante la ecuación $v = IR$. Suponga que v aumenta a razón de 1 $\frac{voltio}{seg}$, mientras que I disminuye a razón de $\frac{1}{3}\,\frac{Amp}{seg}$. Determinar la razón a la cual cambia R cuando $v = 12$ voltios e $I = 2$ Amp. ¿R aumenta o disminuye?

Bibliografía

- Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2012). Precálculo, Matemáticas para el Cálculo. Cencage Learning, 6 Ed. México.
- https://mate2uap.wikispaces.com/file/view/MATEM%C3%81TICA+II+PARCIAL_Solucion.pdf
- http://mastermatematico.blogspot.com.co/2015/10/pendiente-y-distancia-entre-dos-puntos.html
- https://www.ditutor.com/funciones/pendiente-recta.html