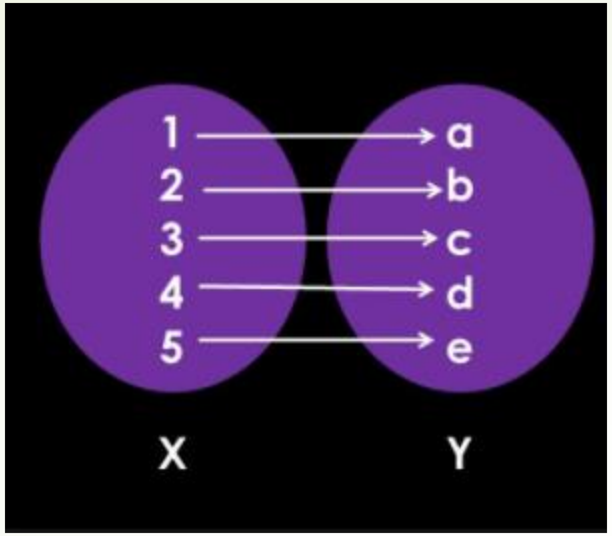


FUNCIONES 1a 1
FUNCIONES INVERSAS

2

❖**MIS VALORES**

Entrega

Transparencia

Simplicidad

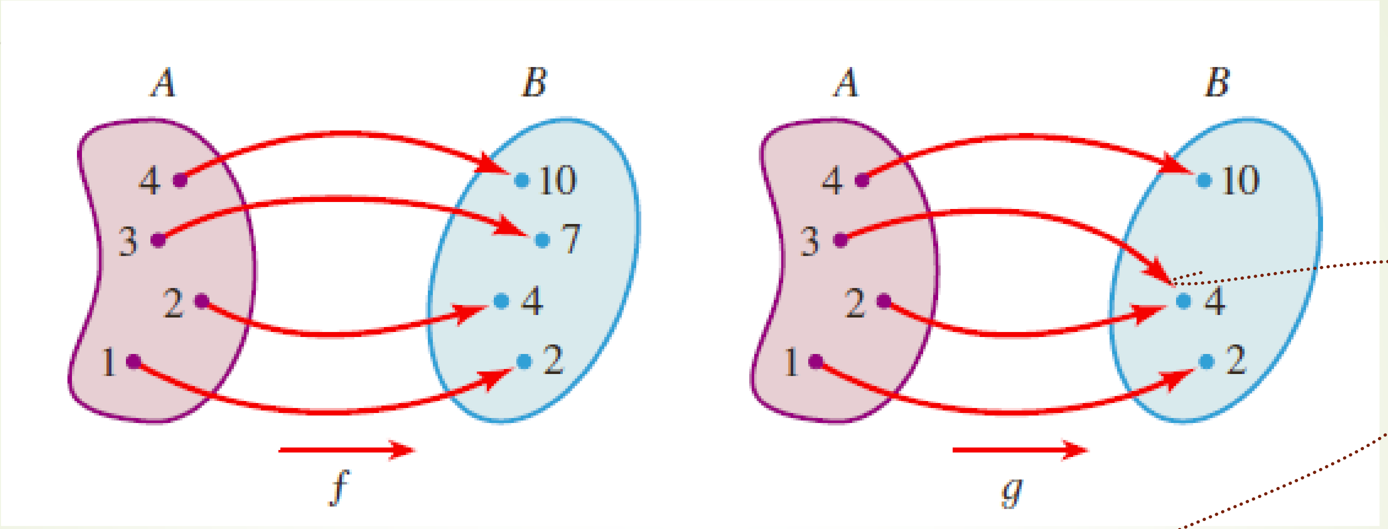
y Persistencia

❖**MI VISIÓN:** Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖**MI MISIÓN:** Entrega a la Voluntad Suprema.

Servir a las personas.

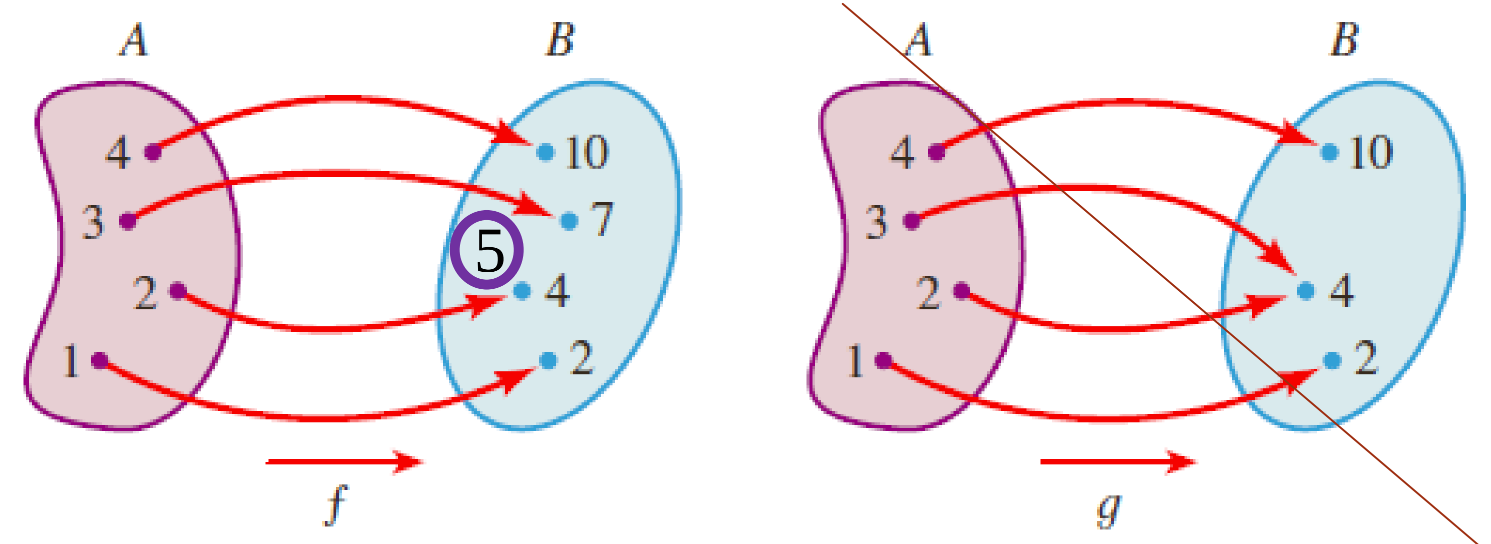
2/21/2018



Aunque ambas son funciones, note que en g, a 2 elementos del dominio le corresponde uno solo del rango B:

a 3 le toca 4

a 2 le toca 4



f es uno a uno

g no es uno a uno

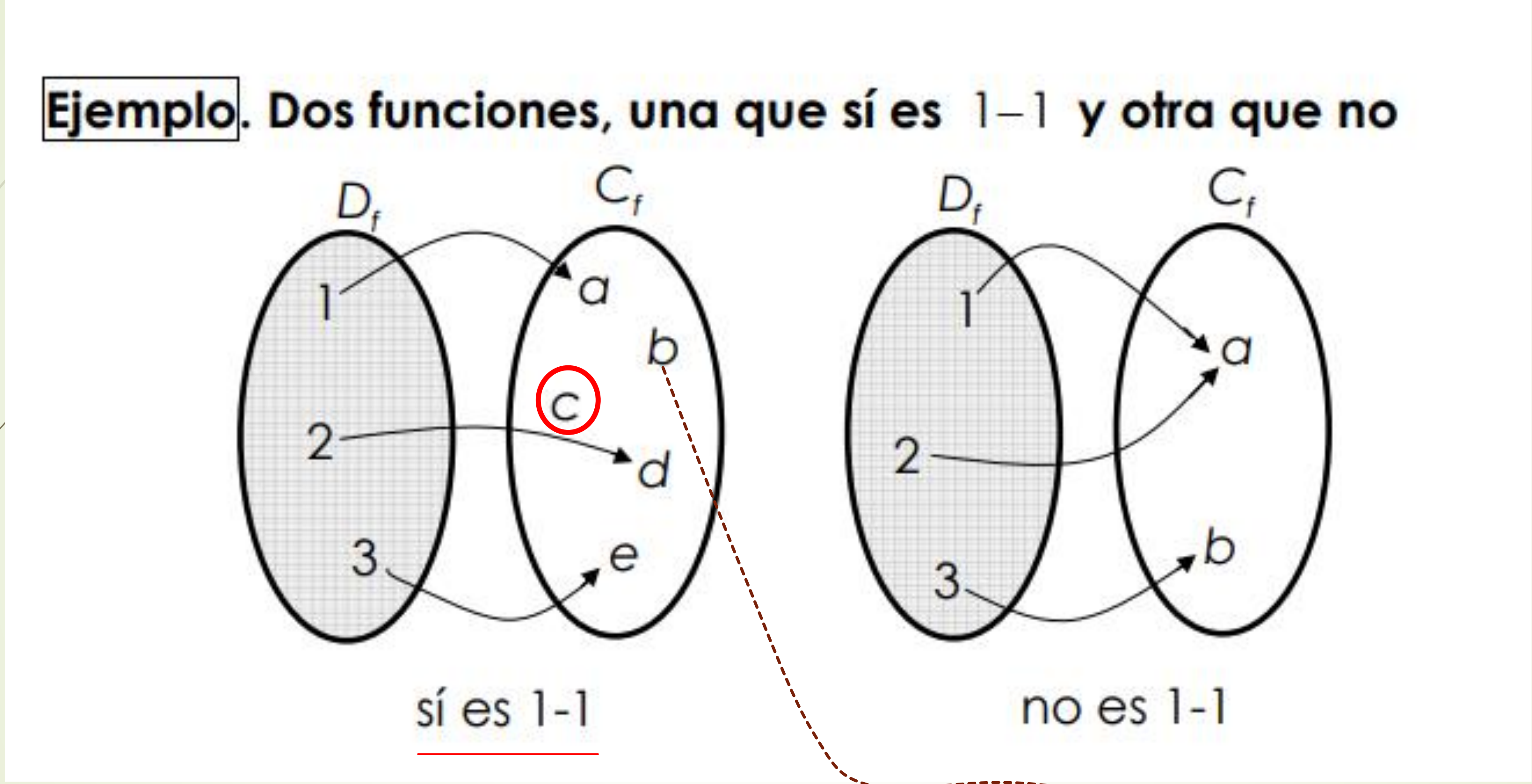
DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO La función 1 a 1 es inyectiva.

Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,

$$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

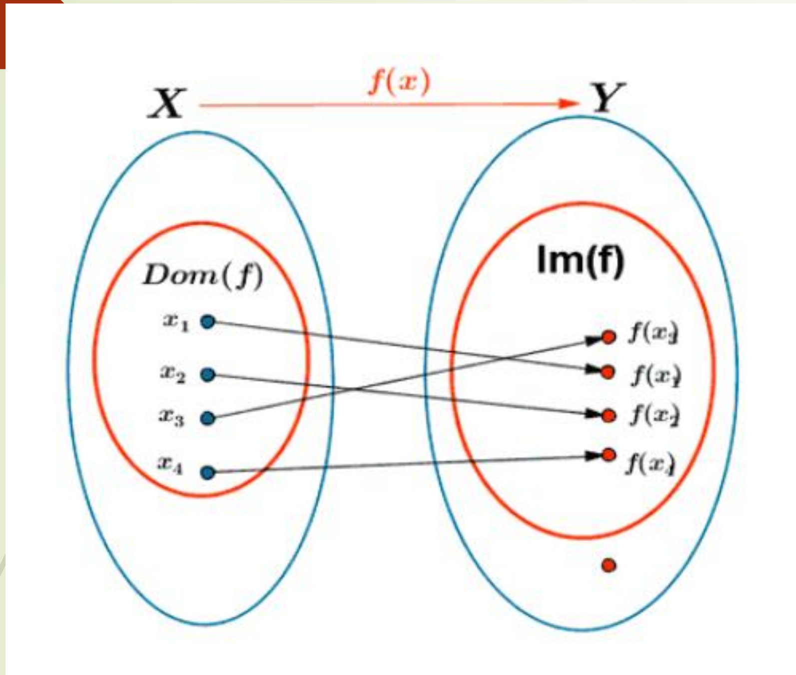
Dos *x* no tienen la misma y. A todo elemento de A le corresponde un solo elemento diferente de B. A cada uno le toca uno diferente. Es uno a uno.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



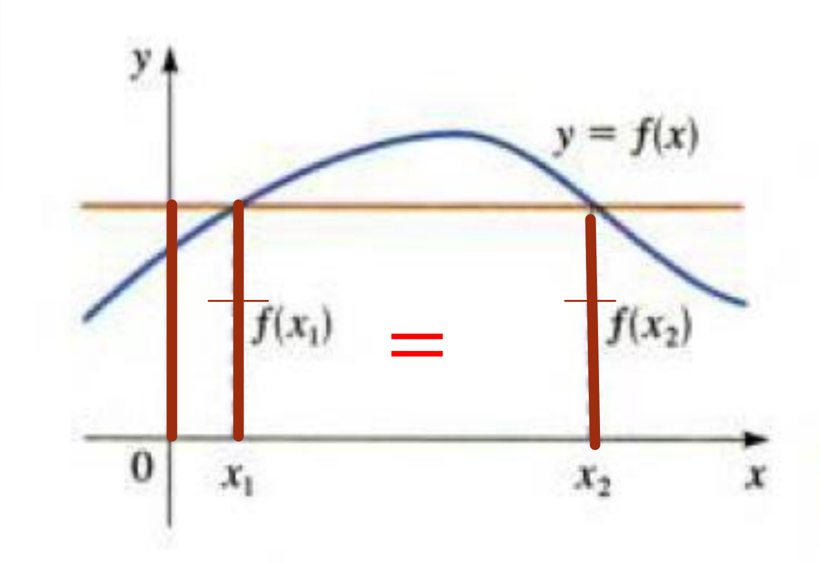
Note que en el rango pueden haber elementos sin correspondencia con el dominio
Df a Cf no es función.

Prueba de la línea horizontal para función 1 a 1



Función 1 a 1

http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones/teoria/inyectiva.html

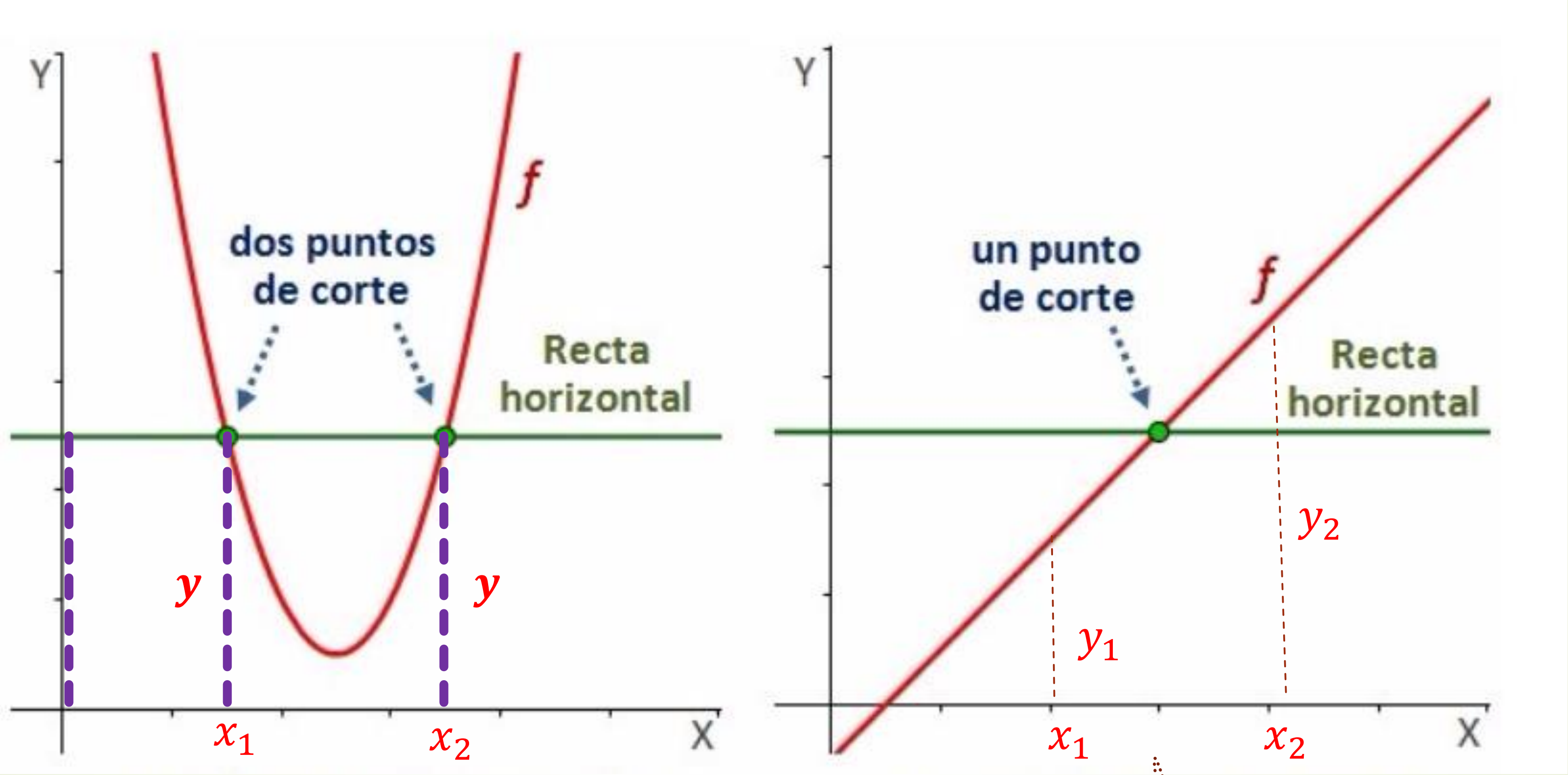


La Función no 1 a 1

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

A dos x diferentes no le pueden tocar el mismo y.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



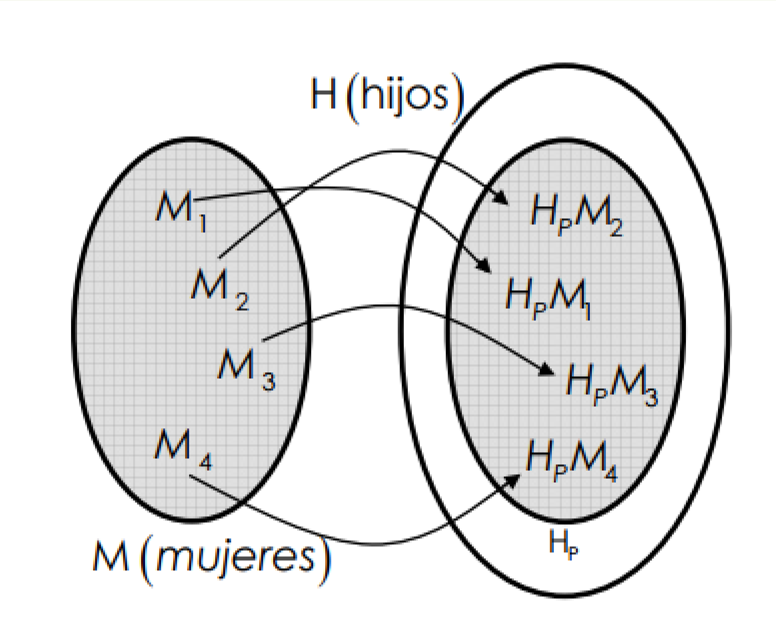
No es función 1 a 1, Para $x_1 \neq x_2 \longrightarrow y_1 = y_2 = y$

Función 1 a 1

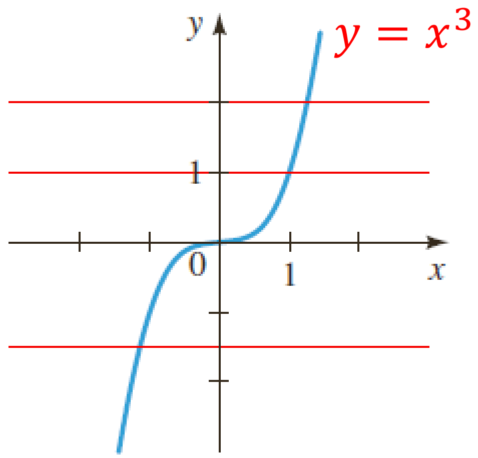
PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL

Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez. Para $x_1 \neq x_2 \longrightarrow y_1 \neq y_2$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



Sea M el conjunto de mujeres con hijos, y f la función que asocia a cada mujer con su hijo primogénito. Es una función 1 a 1.



$f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

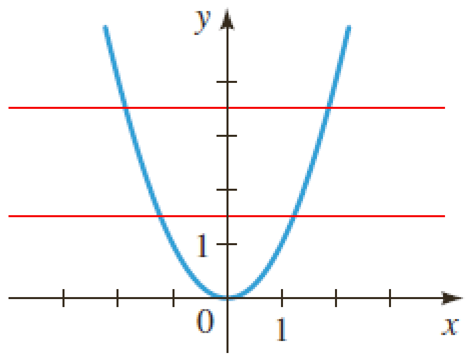
SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13

Determine si la función es uno a uno. 13. $g(x) = \sqrt{x}$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



$f(x) = x^2$ no es uno a uno.

EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

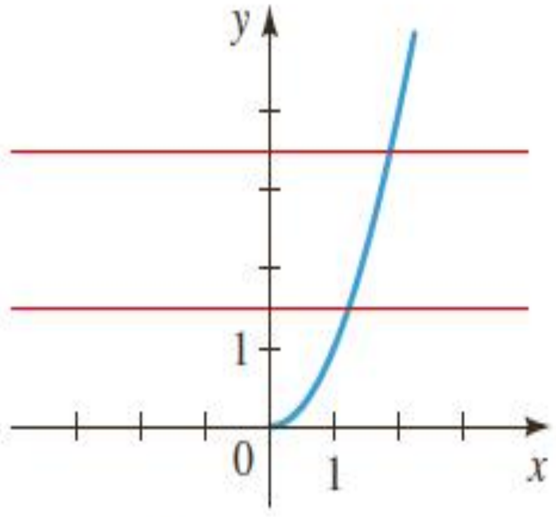
SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, g no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15

Determine si la función es uno a uno.

15. $h(x) = x^2 - 2x$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



$f(x) = x^2 \ (x \geq 0)$ es uno a uno.

Aun cuando la función g del Ejemplo anterior no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Función inversa f^{-1}

Dada una función f : X → Y , estudiaremos el siguiente problema:

si conocemos el "valor de salida" $y \in$ Y , ¿cómo determinar el "valor de entrada" $x \in$ X para el cual y = f(x)?

La que nos permite responder a este interrogante se llama función inversa de f ó f^{-1} y para poderla definirla, la función f debe cumplir ciertos requisitos.

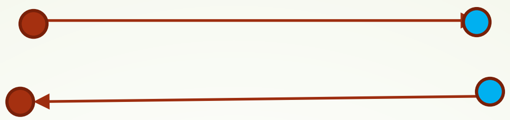
f $\qquad f^{-1}$

Funciones inversas f^{-1} en el sentido más amplio, son funciones que hacen lo "contrario" la una de otra.

Son como dos personas enemigas: la una hace una cosa y la otra se la desbarata y la deja como estaba al principio.

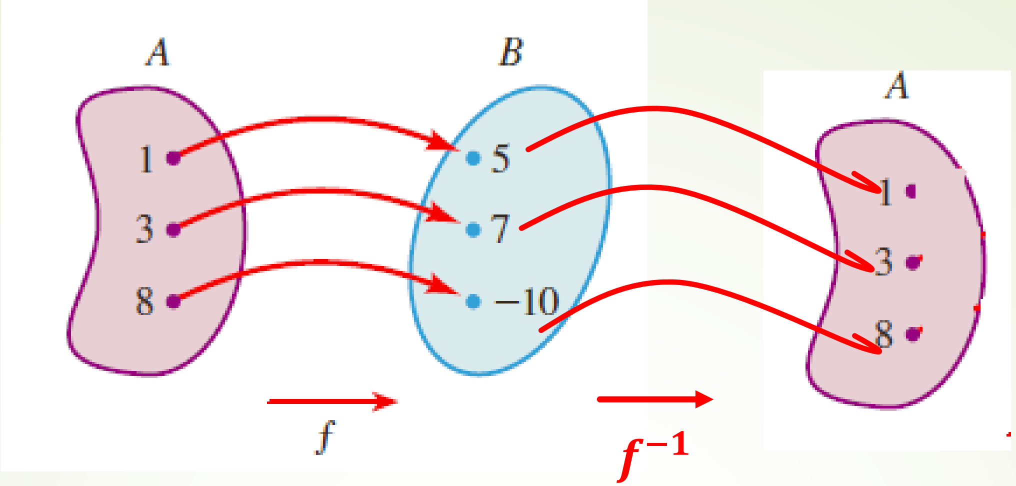
La una coloca un objeto en un sitio y la otra vuelve y lo lleva al sitio original. Al final es como si no se hubiera hecho nada.

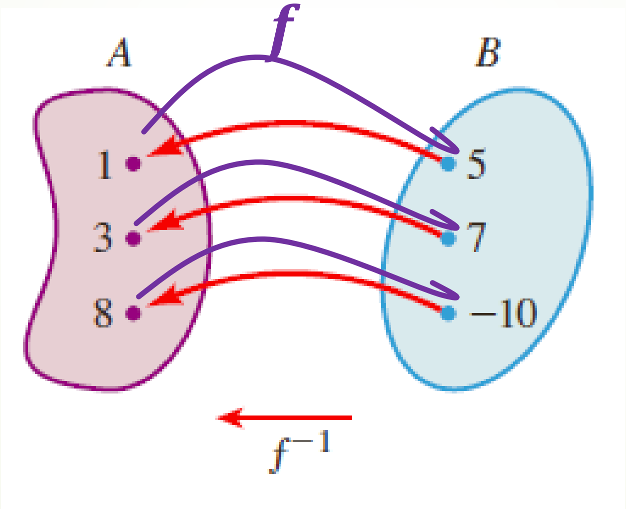
La función inversa es doble función en ambos sentidos



- La *inversa* de una función es una regla o fórmula que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente.
- Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función original ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno*.

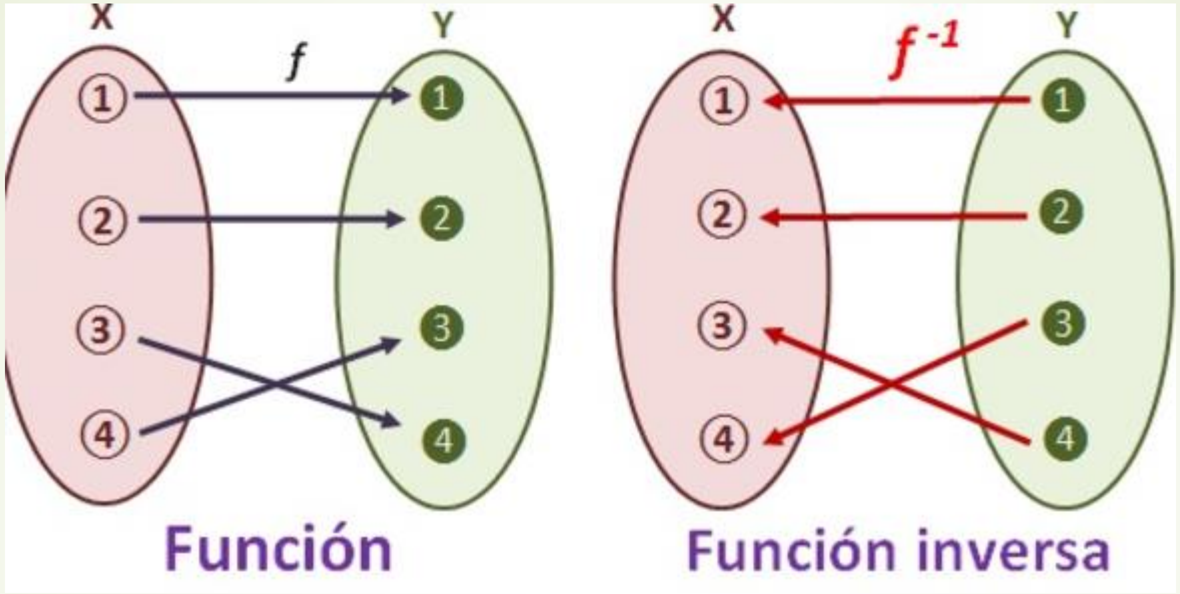
El requisito para que una función tenga inversa es que primero sea 1 a 1.





f coge A y lo transforma en B y f^{-1} coge B y vuelve a transformar en A. f^{-1} coge el rango de f y lo vuelve a transformar en el dominio. El rango de f es el dominio de f^{-1}.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)



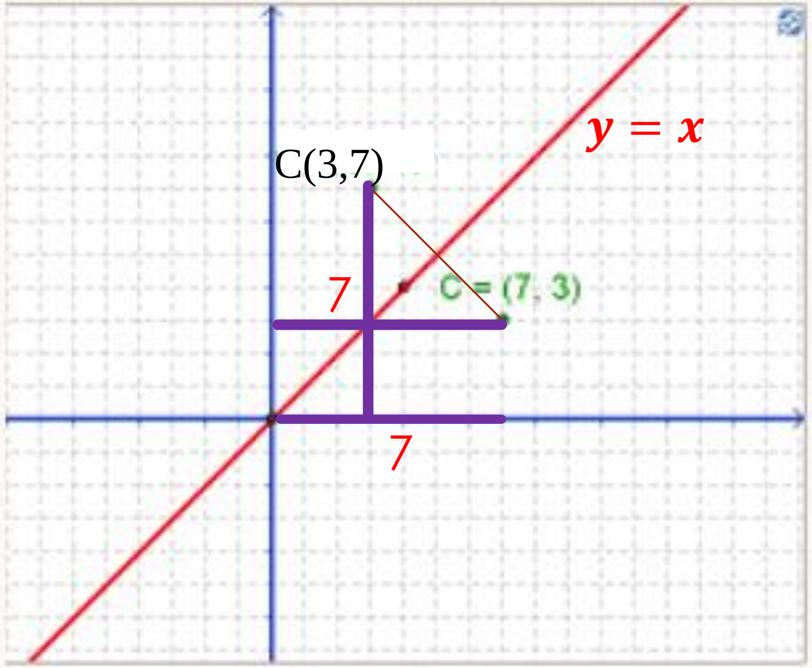
Por definición, la función inversa f^{-1} deshace lo que f hace: si empezamos con x, aplicamos f y luego aplicamos f^{-1}, llegamos otra vez a x, donde empezamos. Análogamente, f deshace lo que f^{-1} hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

- Lo que quiere decir que la función original f toma los x y los convierte en y, y f^{-1} **recoge los** y y los convierte en los x.
- f^{-1} a todo el rango lo convierte en dominio.

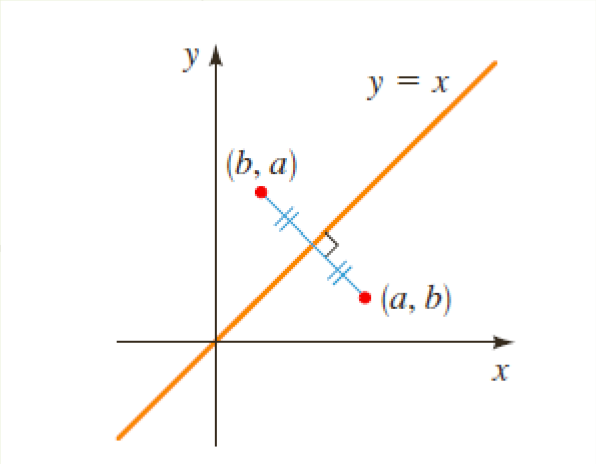
f^{-1} rango $\longrightarrow$ dominio de f

Simetría respecto a la recta y=x

Simetría con respecto a la recta y=x		El punto (a,b) es simétrico respecto a la recta x=y con el punto (b,a)

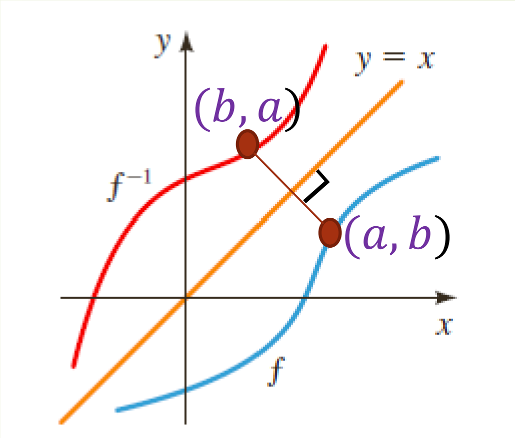
La simetría con respecto a la recta $y = x$ intercambia las coordenadas: La de x la coloca como y, la de y la coloca como x.

En palabras sencillas si una función $f(x)$ tiene inversa $f^{-1}(x)$, un punto de coordenadas (a, b) debe cumplir que $f^{-1}(x)$ lo trasforma en (b, a): <u>invierte las coordenadas.</u>



$$(a, b) \xrightarrow{f^{-1}} (b, a)$$

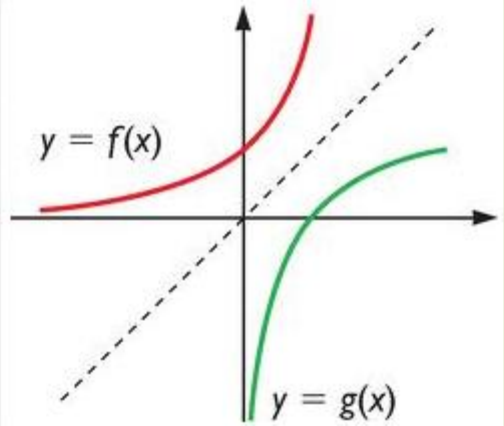
$f(a) = \mathrm{b} \rightarrow f^{-1}(b) = \mathrm{a}$



$f(x)$ toma a y lo convierte en b ➡ $a \xrightarrow{f} b$

$f^{-1}(x)$ toma b y lo convierte en a ➡ $b \xrightarrow[f^{-1}]{} a$

$(2, 5) \xrightarrow{f^{-1}} (5, 2)$



f^{-1} es simétrica respecto a la recta y=x

1. $f^{-1}: Y \to X$.
2. Dominio de f^{-1} = rango de f.
3. Rango de f^{-1} = dominio de f.
4. $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$
5. $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in Y$

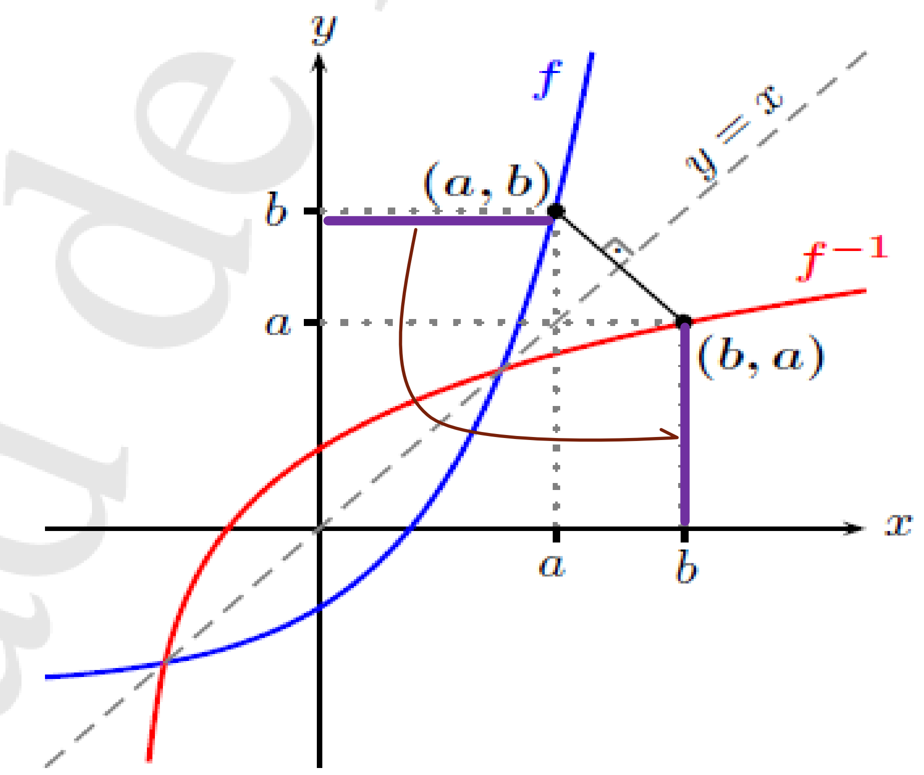
Para un punto de coordenadas (a,b) se cumple

Por la definición (1) de función inversa

$$f^{-1}(b) = a \iff b = f(a),$$

y por tanto el punto de coordenadas (a, b) pertenece a la gráfica de f si, y sólo si el punto (b, a) pertenece a la gráfica de f^{-1}. Así, la gráfica de f^{-1} es la misma que la de f excepto que los roles de los ejes x e y se cambian.

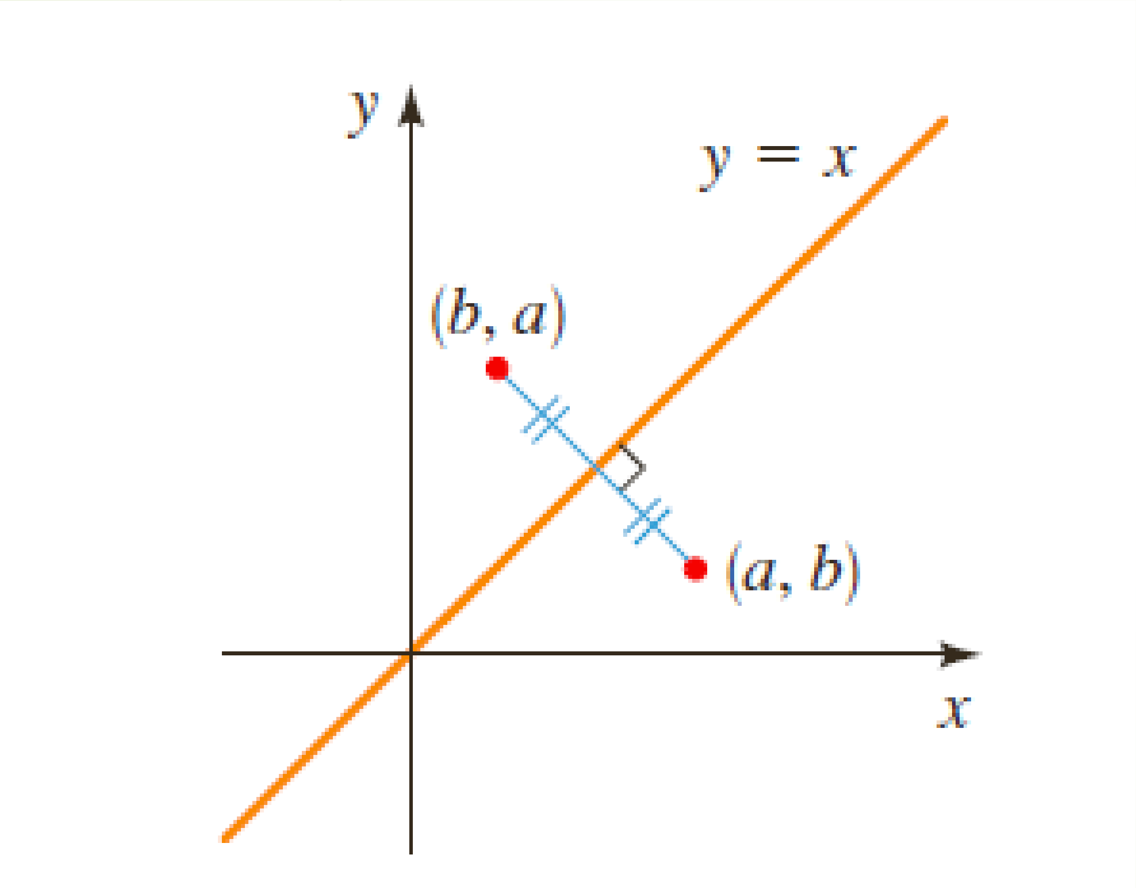
Observemos que los puntos (a, b) y (b, a) son simétricos respecto a la recta $y = x$ y por tanto las gráficas de f y f^{-1} son simétricas a dicha recta.

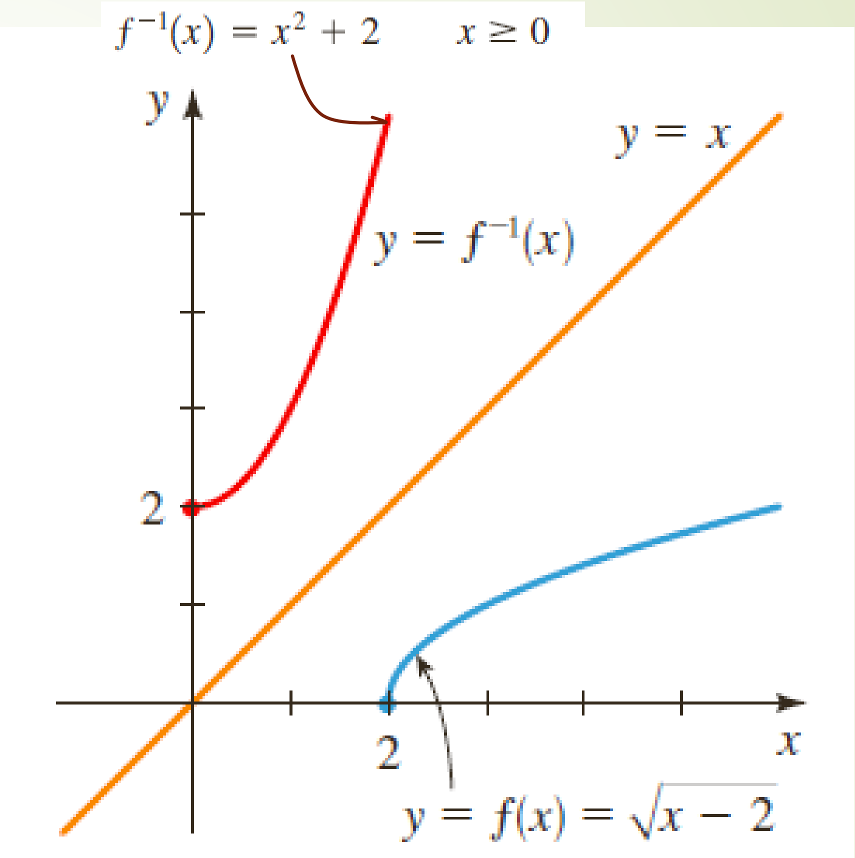


http://ciencias.udea.edu.co/semilleros/2012-1/operativas/Taller-7-funciones-inv.pdf

Suponga que dos funciones son inversas. Si (a , b) es un punto en la **gráfica** de la función original, entonces el punto (b, a) debe ser un punto en la gráfica de la función inversa. Las gráficas son *imágenes espejo* una de otra con respecto a la recta $y = x$

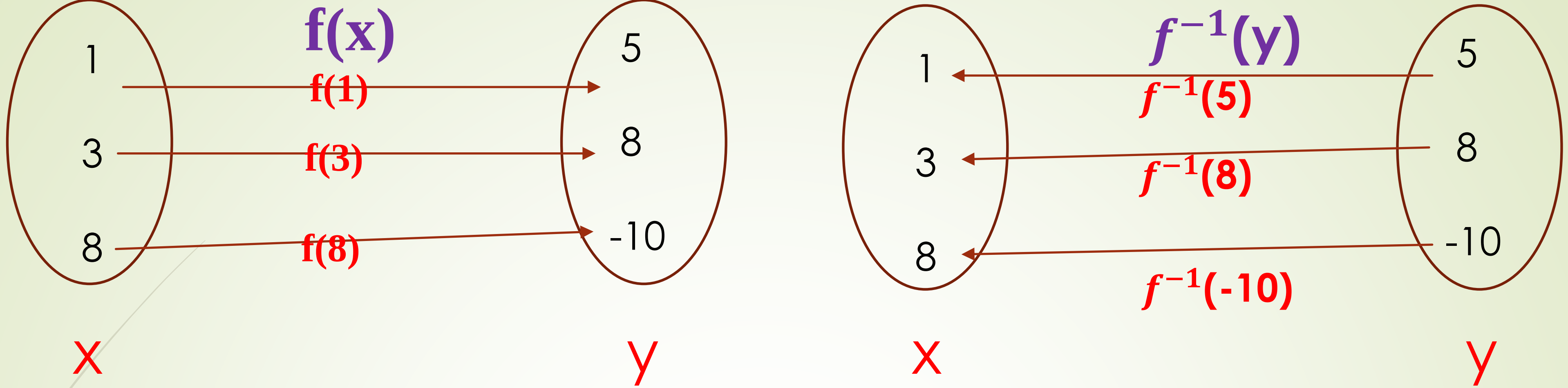
La gráfica de una función, y la gráfica de su inversa, son simétricas con respecto a la recta $y = x$.





(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Una función es **simétrica respecto a la recta** $x=y$, si al intercambiar la entrada por la salida, obtenemos la misma expresión



$f(1) = 5$, $f(3) = 7$, $f(8) =$-10, $f^{-1}(5) =?$ $f^{-1}(8) =?$ $f^{-1}(-10) =?$

Por definición de la función inversa f^{-1} toma un elemento del rango de f y lo devuelve a dominio.

Por tanto, toma 5 (del rango de f) y convierte en 1 nuevamente. Toma 8 y lo convierte en 3. Toma -10 y lo convierte en 8.

$f^{-1}(5)= 1$

$f^{-1}(7) = 3$

$f^{-1}(-10) =8$

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

$$f\left(f^{-1}(x)\right)=f^{-1}\left(f(x)\right)=(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)$$

PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } A$$

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{para toda } x \text{ en } B$$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f.

Si se evalúa la función inversa $f^{-1}(x)$ con $f(x)$, se vuelven a obtener los elementos del dominio de $f(x)$.
Si se evalúa la función $f(x)$ con $f^{-1}(x)$ se obtienen también los elementos del dominio de $f(x)$. Pasa exactamente lo mismo.

(Stewart, Redlin, Watson, 2012)

Si aplicamos el método del cajón a la función f^{-1}(x) se entenderá fácilmente como encontrarla.

En realidad es evaluar en f^{-1}(x) la función f(x) y debe dar x.

También es evaluar f en f^{-1} y debe dar x.

$f^{-1}(\mathrm{x})$ $\quad f^{-1}(\quad)$ $\quad f^{-1}(f(x))$

EJEMPLO | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

SOLUCIÓN Observe que el dominio y rango de f y de g es $\mathbb{R}$. Tenemos

$f(x) = x^3$ $\qquad$ $g(x) = x^{1/3} = f^{-1}(x) = ?$

Si aplicamos el método del cajón o paréntesis a f^{-1}:

$f^{-1}(x) = x^{1/3} = (\quad)^{1/3} = (x^3)^{1/3} = x^{3/3} = x$

Ahora a f

$f(f^{-1}(x))$ $\qquad$ $f(x) = x^3$ $\qquad$ $(\quad)^3 = (x^{1/3})^3 = x$

La ecuación de $f^{-1}(x)$ a partir de $f(x)$

CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

EJEMPLO | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

EJEMPLO | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación.

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$

$$x = \frac{y + 2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente, intercambiamos x y y. $$y = \frac{x + 2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 2}{3}$.

EJEMPLO | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

EJEMPLO | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^5 - 3}{2} && \text{Ecuación que define la función} \\
2y &= x^5 - 3 && \text{Multiplique por 2} \\
x^5 &= 2y + 3 && \text{Sume 3 (y cambie lados)} \\
x &= (2y + 3)^{1/5} && \text{Tome raíz quinta de cada lado}
\end{aligned}
$$

ón

A continuación intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$.

$$f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}.$$

Ejemplo 2: Calcular la siguiente función inversa:

$$x=\frac{2y+3}{y-1}$$

1º. Hacemos el cambio de y por x:

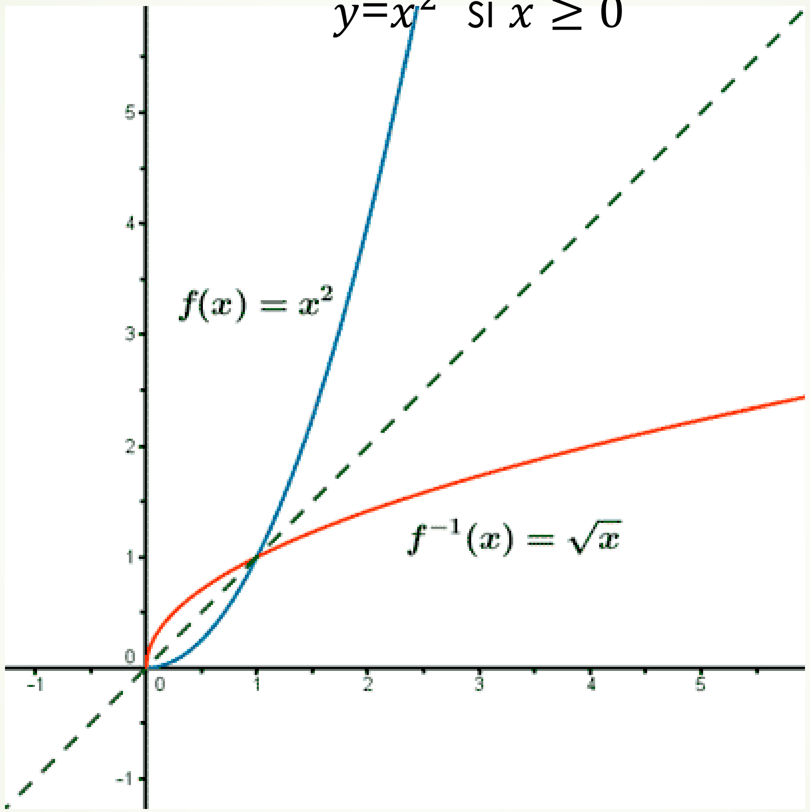
$$\begin{gathered} x(y-1)=2y+3 \\ xy-x=2y+3 \\ xy-2y=x+3 \\ y(x-2)=x+3 \\ y=\frac{x+3}{x-2} \end{gathered}$$

2º. Despejamos la y:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}=y$$

3º. Finalmente, la función inversa es:

$y=x^2$ si $x \geq 0$



http://calculo.cc/temas/temas_bachillerato/primero_ciencias_sociales/funciones/teoria/inversa.html

Haga este ejercicio

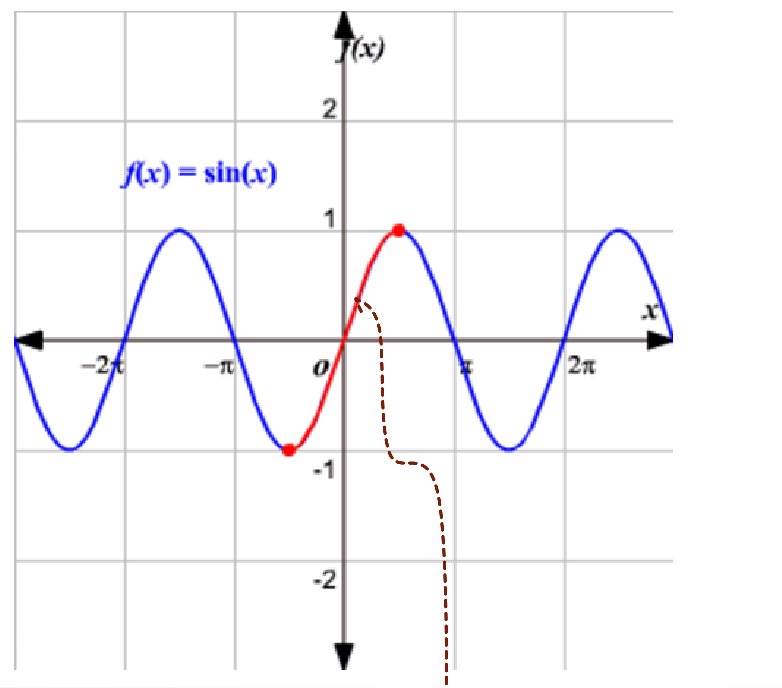
- Encuentre la función inversa de *f*.

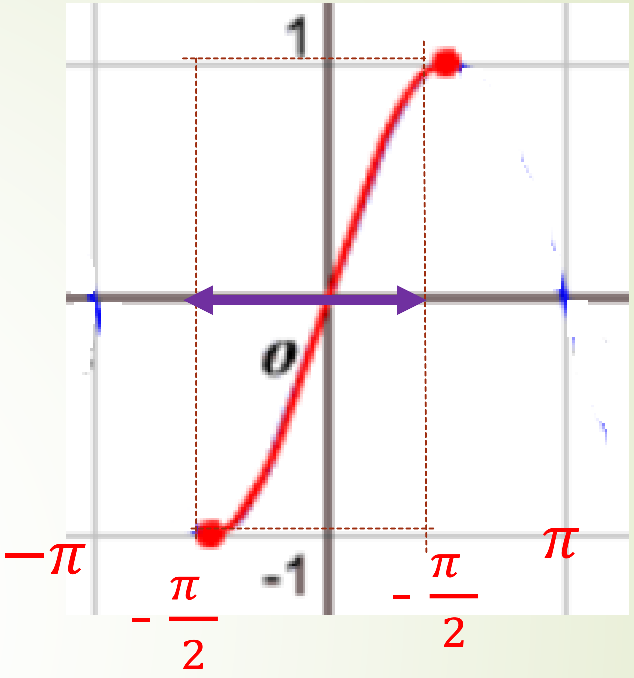
27. $f(x) = 2x - 5; \quad g(x) = \dfrac{x+5}{2}$

37. $f(x) = 2x + 1$

38. $f(x) = 6 - x$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS 1 a 1





D: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,

R: (-1, 1)

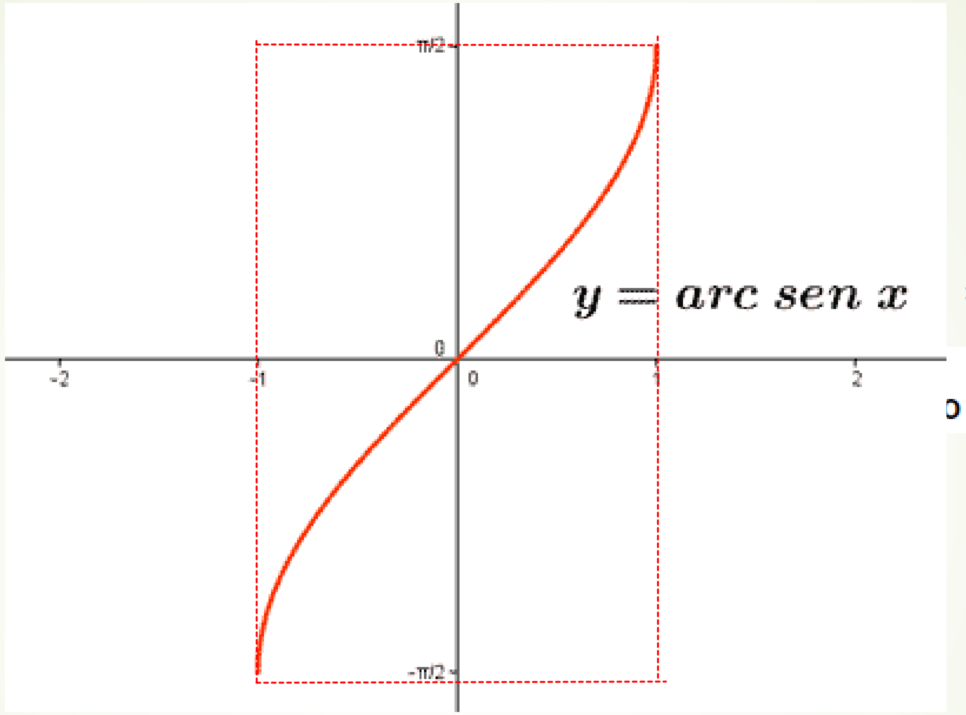
Las funciones trigonométricas son todas funciones periódicas . Así, las gráficas de ninguna de ellas pasa la prueba de la línea horizontal y por tanto no son 1-a-1 . Esto significa que ninguna de ellas tiene una inversa a menos que el dominio de cada una, esté restringido para hacer de ellas funciones 1 a 1.

Si restringimos el dominio de $f(x) = \sin x$ a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, hemos hecho la función 1a 1.

El Dominio es $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, el rango es [–1, 1].

https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS



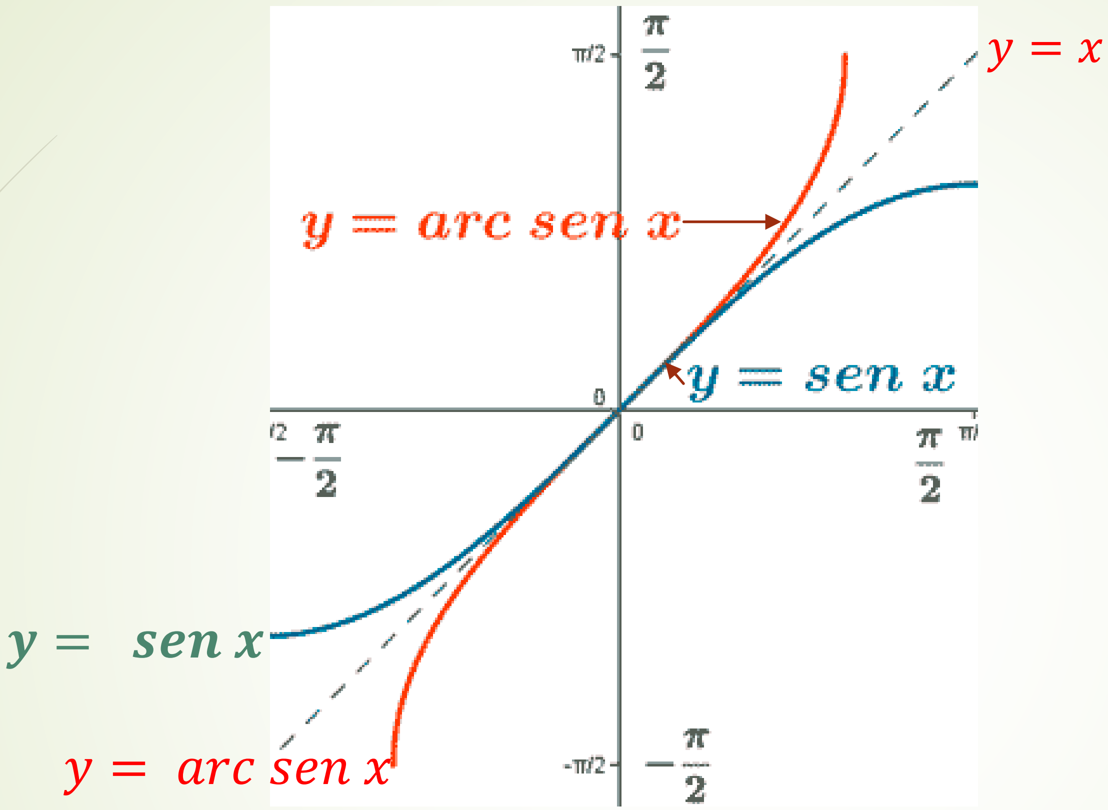
$= y = \sin^{-1} x$

(x): $[-1, 1]$

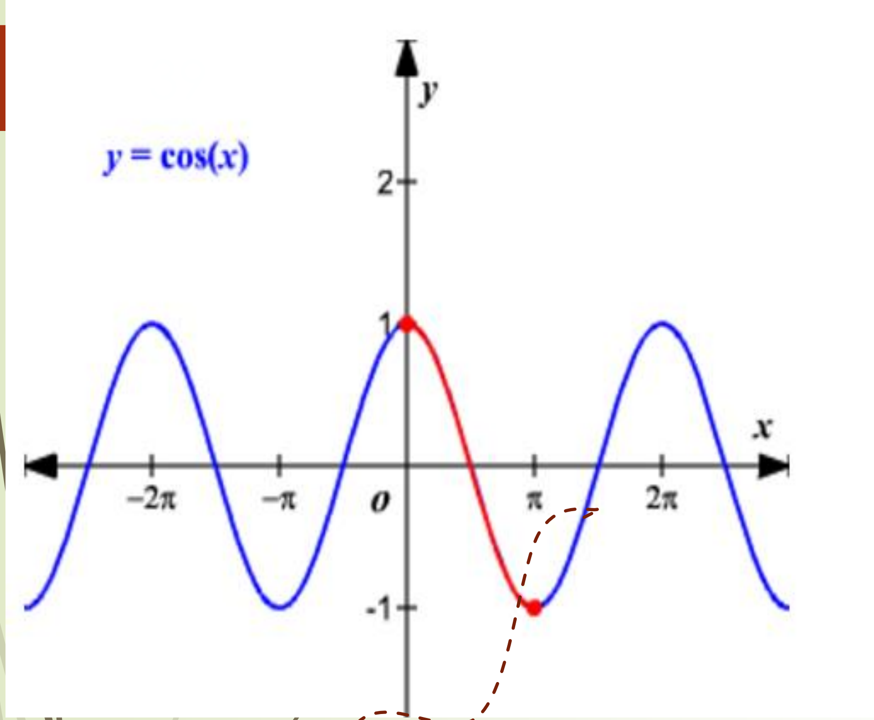
$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$

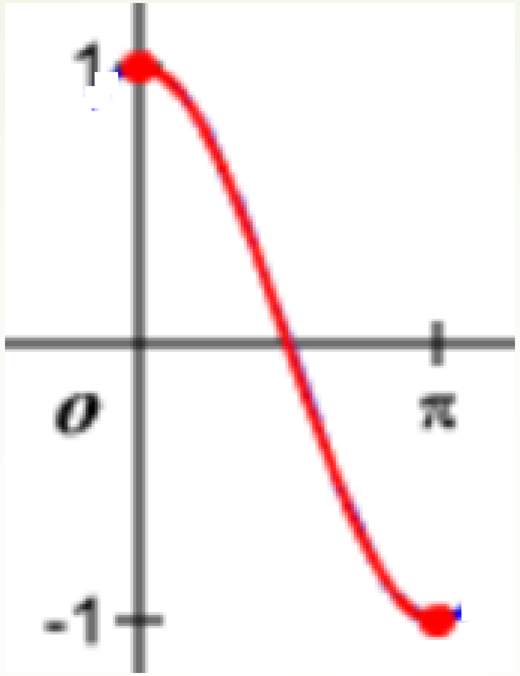
Denotamos la función inversa como $y = \sin^{-1} x$. Se lee y es la inversa del seno de x y significa que y es el ángulo de número real cuyo valor de seno es x . Pero tenga cuidado con la notación usada. El superíndice " -1 " NO es un exponente. Para evitar esta notación, algunos libros usan y = arc sen x como notación

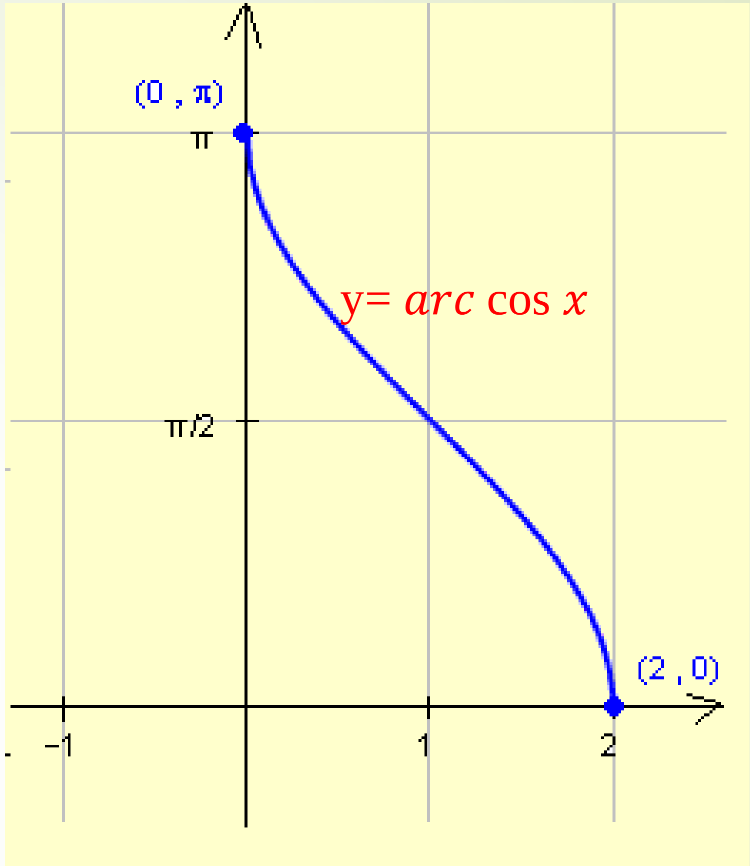
https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions



$y = x$
$y = arc\ sen\ x$
$y = sen\ x$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$y = \ \ sen\ x$
$y = \ arc\ sen\ x$

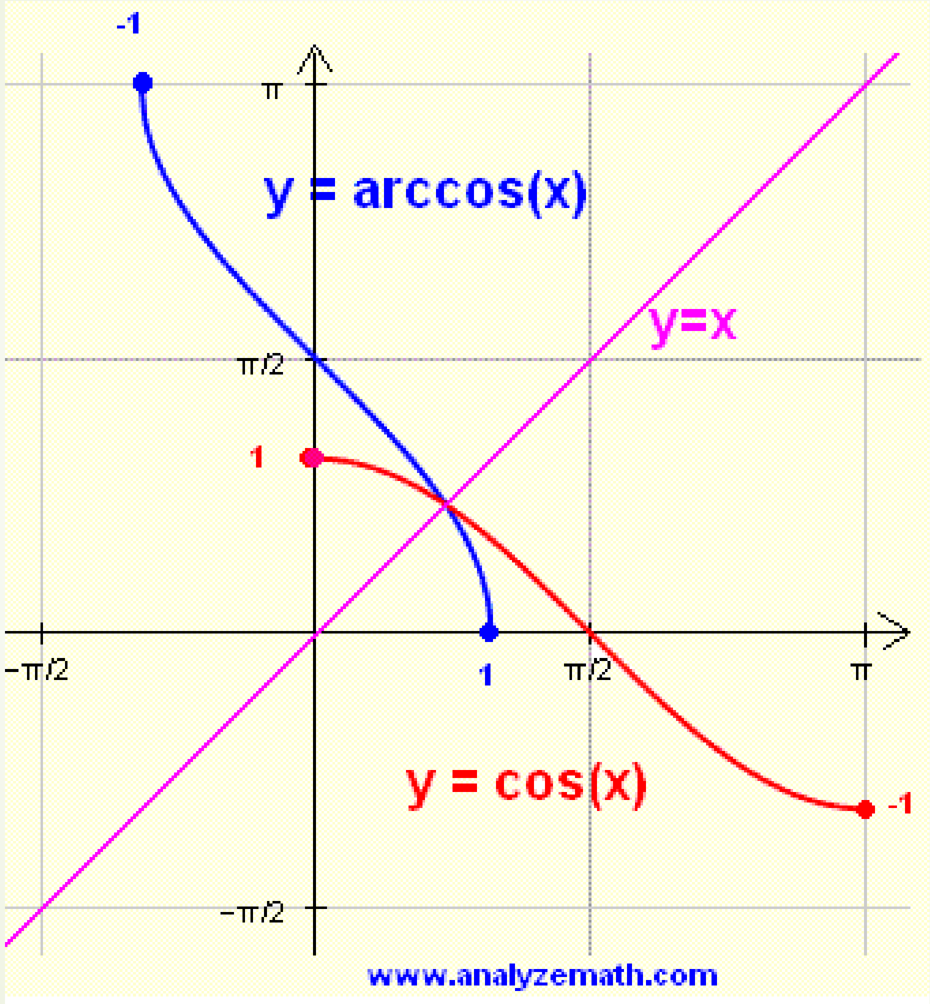




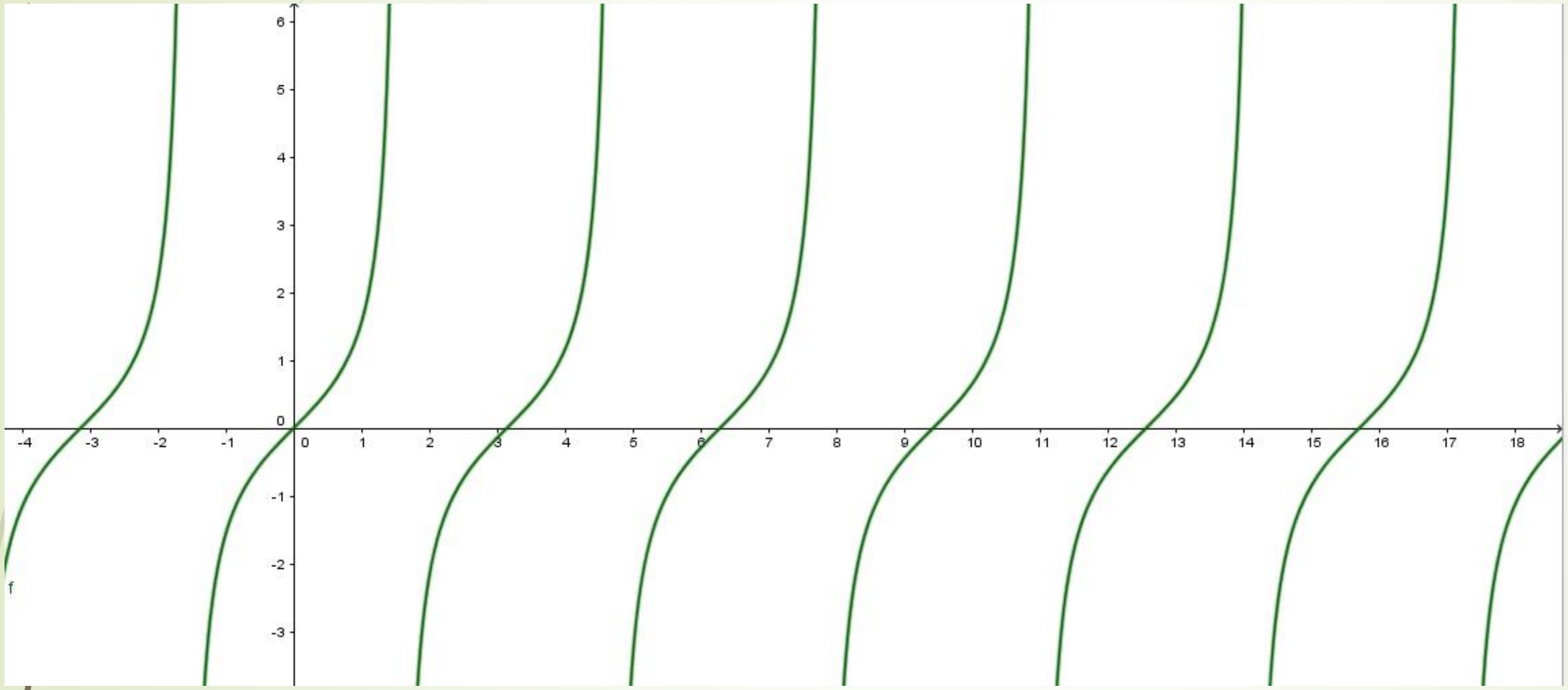


Similarmente, podemos restringir los dominios de las funciones coseno para hacerlas 1-a-1 y a partir de ahí, obtener las funciones $arc\cos x$

https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions


-1
π
y = arccos(x)
y=x
π/2
1
−π/2
1
π/2
π
y = cos(x)
-1
−π/2
www.analyzemath.com

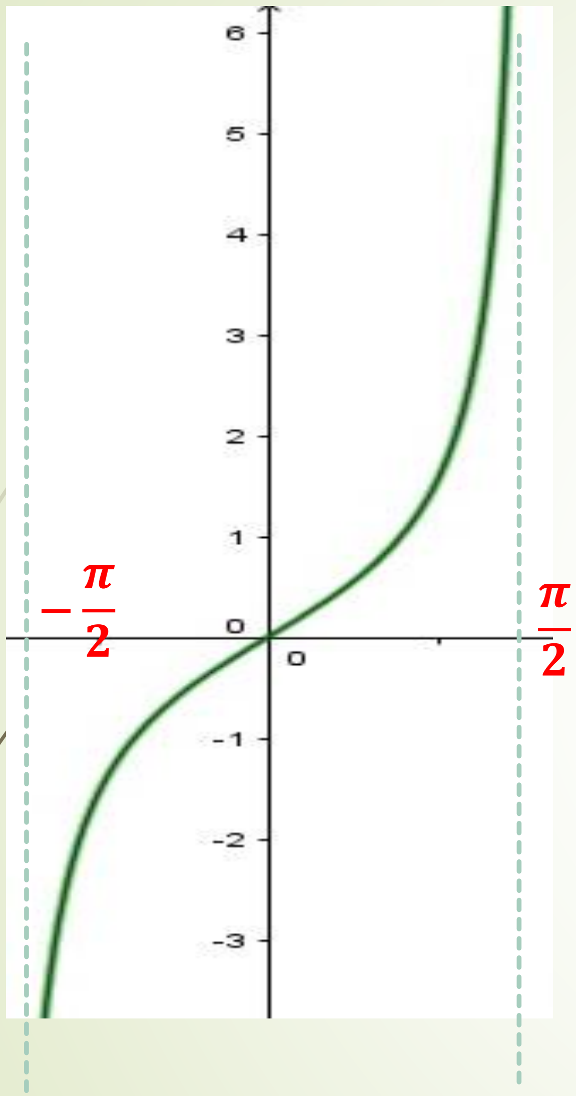
Gráfica de $y = \tan x$

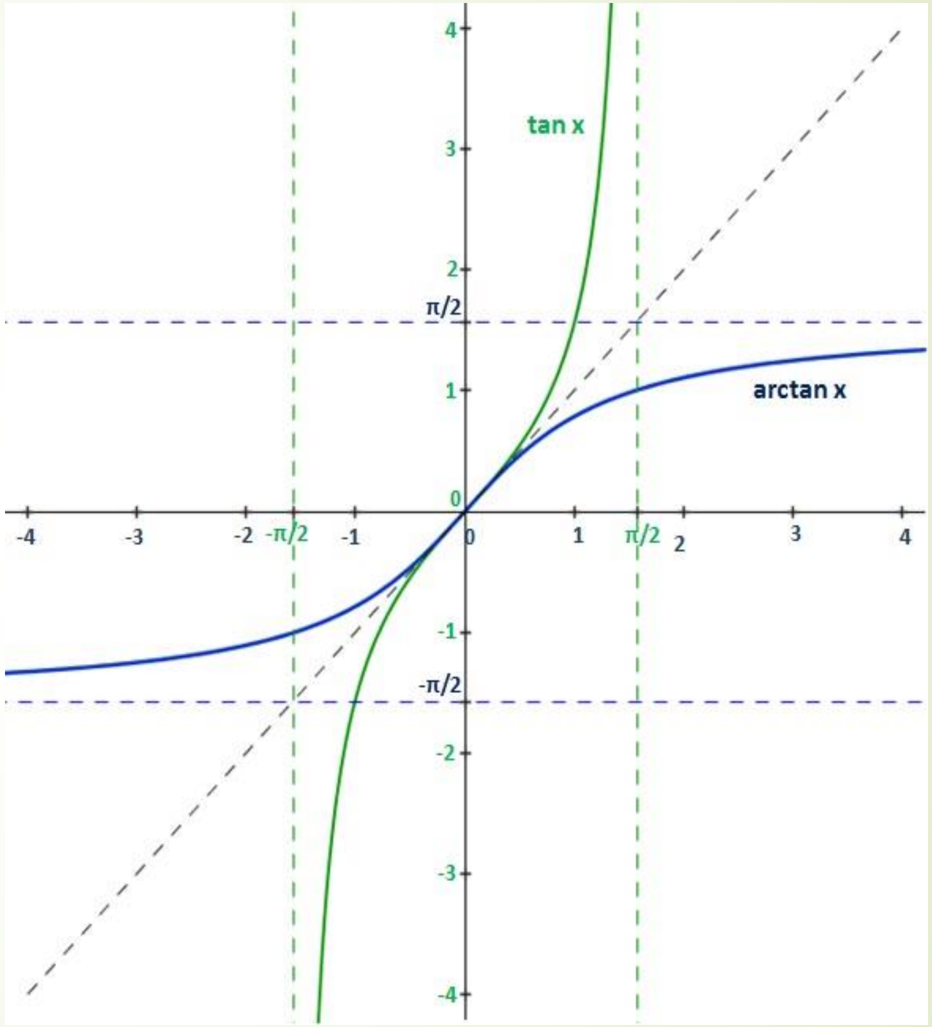


D: reales $\neq (\frac{\pi}{2} + n\pi)$

R: $(-\infty, \infty)$

http://funcionesvalery.blogspot.com.co/2015/11/





http://www.universoformulas.com/matematicas/trigonometria/arcotangente/

Función	Dominio	Rango
$\sin^{-1} x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1} x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$(0, \pi)$
$\sec^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
$\csc^{-1} x$	$(-\infty, \infty)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$

https://www.varsitytutors.com/hotmath/hotmath_help/spanish/topics/inverse-trigonometric-functions

El dominio de la función tangente inversa es $(-\infty, \infty)$ y el rango es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. La inversa de la función tangente arrojará valores en los cuadrantes 1 ^{er} y 4 ^{to}.

El mismo proceso es usado para encontrar las funciones inversas de las funciones trigonométricas restantes-cotangente, secante y cosecante.