FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

PROFESOR EFRÉN GIRALDO T.

FUNCIONES

EXPONENCIALES

Y LOGARITMICAS.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Introducción

- Las funciones exponenciales son una de las familias de funciones más importantes en las ciencias por la gran cantidad de aplicaciones que tienen.

- En las ciencias naturales las aplicaciones son muchas incluyendo modelos de crecimiento en biología, reacciones en química, orbitales moleculares, física, ingeniería, arquitectura, etc

- En la administración de Empresas se usan para interés compuesto, anualidades y planes de ahorro entre otras.

-

- Las funciones exponenciales y logarítmicas pueden ser utilizadas para resolver y modelar algunas situaciones de la vida real: el crecimiento de bacterias en un cultivo, el crecimiento de la población de una ciudad, el tiempo que toma un objeto para llegar a cierta temperatura, etc.

- $$y = f(x) = a^x$$

- Se llaman funciones exponenciales a todas aquellas funciones de la forma **$f(x) = a^x$**, en donde la base a, es una constante y el exponente x la variable independiente, que puede ser cualquier real sea positivo, negativo o 0.

a no puede ser – ni 1

- La definición de función exponencial exige que la **base** **a** **sea siempre positiva** y diferente de uno **(a>0 y a≠1)** debido a que al reemplazar a por 1, la función a^x se transformaría en la función constante $f(x) = 1$.

- La base no puede ser negativa porque funciones de la forma $f(x)=(-9)^{1/2} = \sqrt{-9}$ no tendrían sentido en los números reales

$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $g(x) = 3^x$ $\qquad$ $h(x) = 10^x$

Base 2 $\qquad$ Base 3 $\qquad$ Base 10

- La función exponencial cumple todas las leyes de los exponentes vistas en las primeras clases

(Stewart, 2007)

Uso de calculadora

Ejemplo 1 **Evaluación de funciones exponenciales**

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

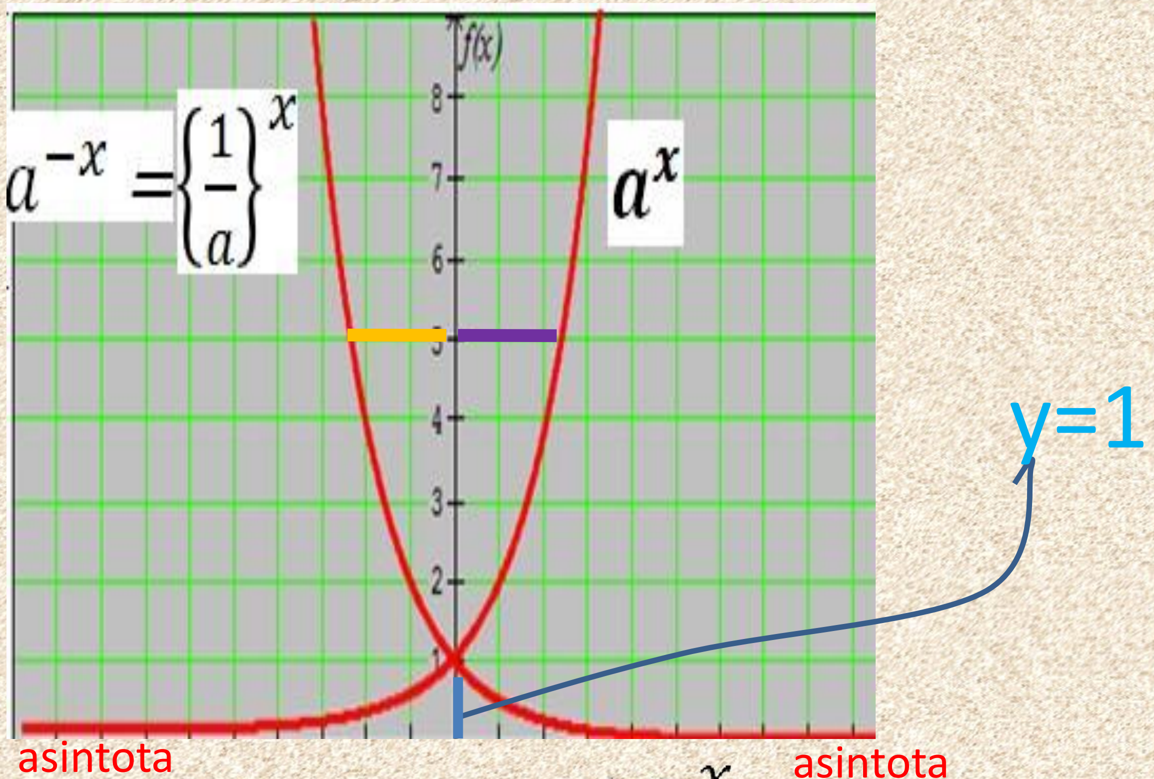
a) $f(2)$ b) $f(-\frac{2}{3})$ c) $f(\pi)$ d) $f(\sqrt{2})$

Solución Se usa una calculadora para obtener los valores de f.

	Teclas de la calculadora	Resultado
a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

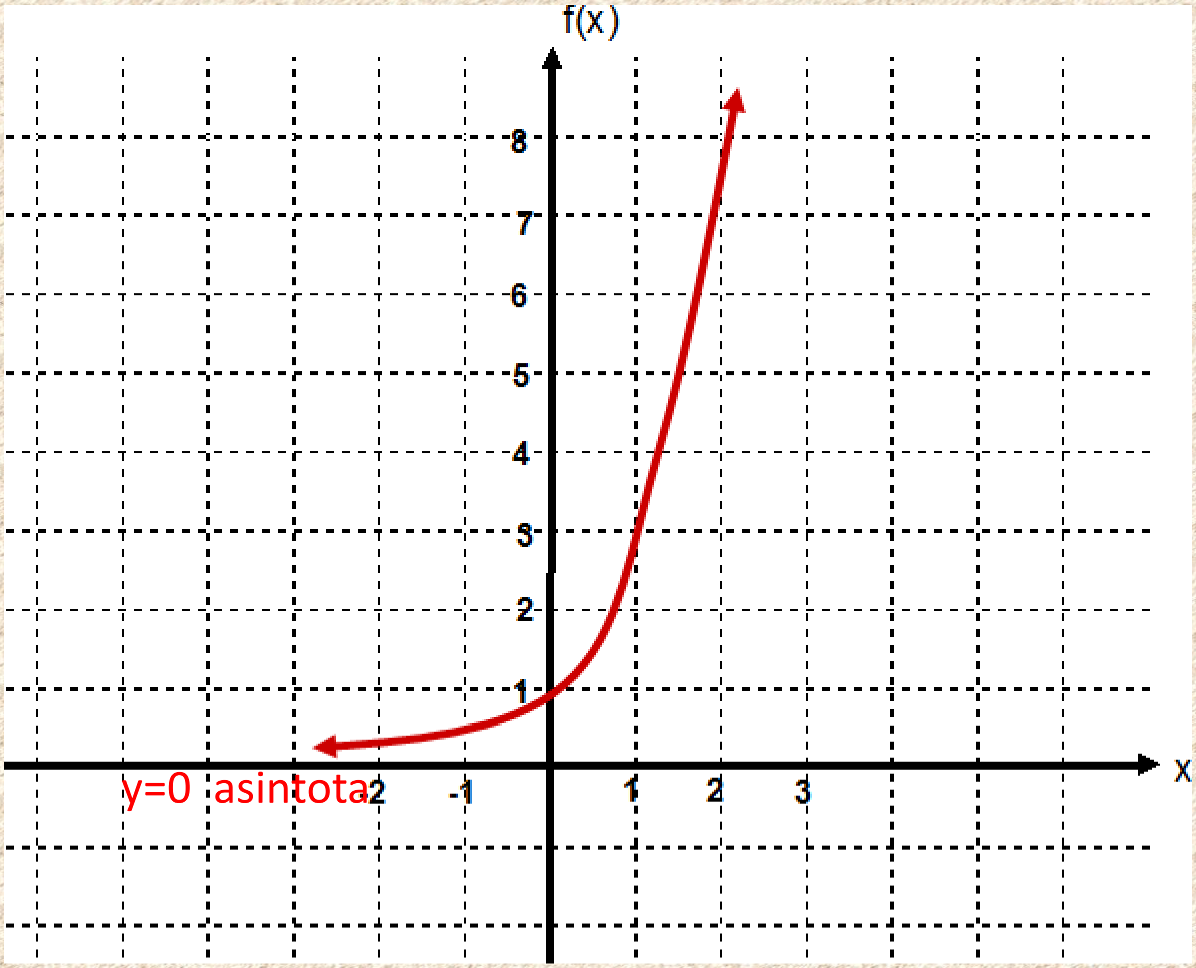
(Stewart, 2007)

Gráficas de funciones exponenciales



- Debido a que $a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left\{\frac{1}{a}\right\}^{x}$, la función $\boldsymbol{a^x}$ es simétrica con la función $\left\{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}}\right\}^{\boldsymbol{x}}$

(Hernandez, 2011)



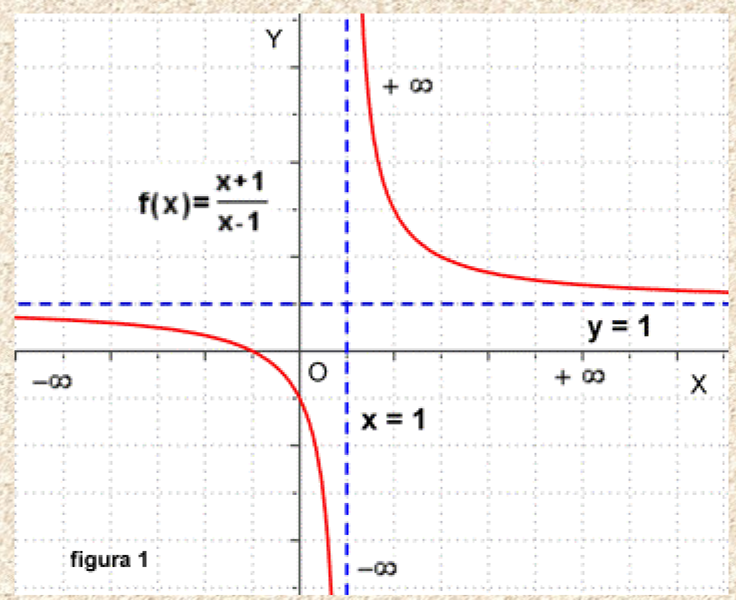
https://es.slideshare.net/cmc325/funciones-exponenciales-13096624

Asíntotas

Cuando una curva se acerca a una línea recta tanto como se quiera, pero nunca la toca, a la recta se le llama una asíntota. La distancia entre la curva y la gráfica tiende a cero pero nunca es cero.

La asíntota puede ser:

- Horizontal (eje x, o una paralela el eje x) $\longrightarrow$ $y = k$
- Vertical (eje y o una paralela al eje y) $\longrightarrow$ $x = k$
- Oblicua (cualquier línea no paralela a x o a y)



http://www.dma.fi.upm.es/recursos/aplicaciones/calculo_infinitesimal/web/estudio_funciones/asintvert.html

Estas asíntotas suelen aparecer al haber puntos donde la función no esté definida.

Una función puede tener a lo sumo dos asíntotas horizontales.

Una función puede tener una, dos y hasta infinitas asíntotas verticales.

https://www.gaussianos.com/calcular-las-asintotas-de-una-funcion/

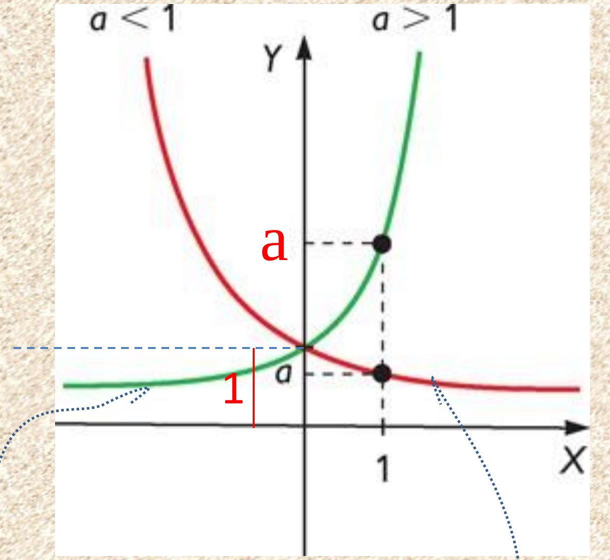
Funciones que pueden tener asíntotas verticales:

- Funciones racionales
- Funciones logarítmicas
- Función tangente.

- Funciones racionales: Indeterminación K/0.

Si $f(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional simplificada, sus asíntotas verticales se encuentran en los valores de x que hacen cero al denominador. Se hallan resolviendo la ecuación $Q(x) = 0$.

- Funciones logarítmicas
- Función tangente.



- Las funciones exponenciales se clasifican en las que van hacia la *derecha* en las cuales a **>1** a^x

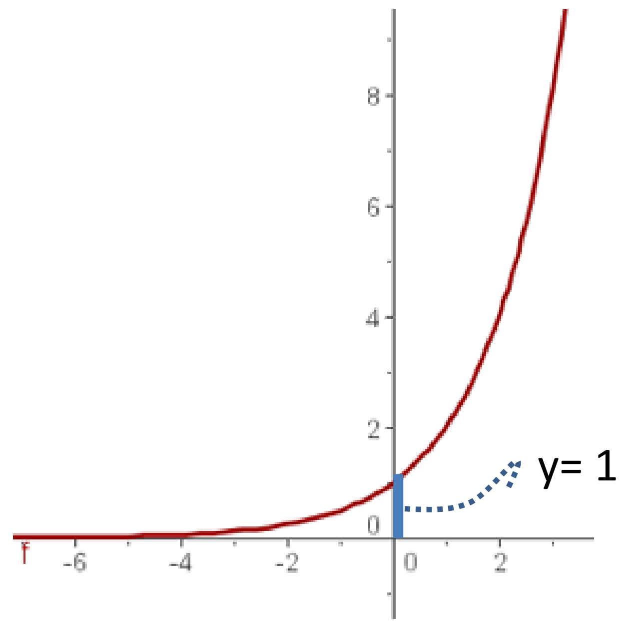
- Y las que van hacia la izquierda en las cuales 0 >a >1 a es fraccionario 1/a

$$a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

Las funciones exponenciales cuando la base **a>1** tienen gráfica que va hacia la derecha

- $f(x)=2^x$

x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



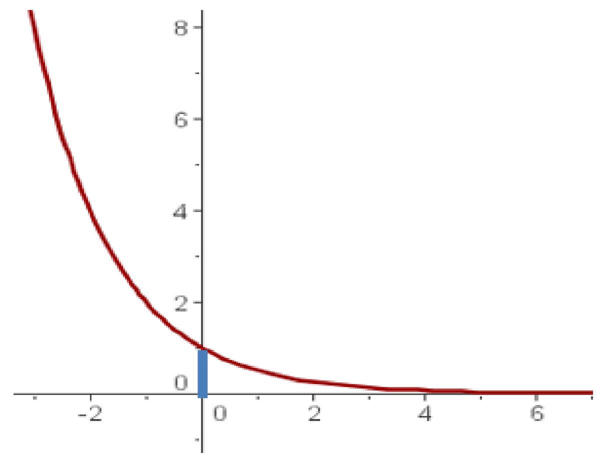
Gráfica de f(x)= 2^x

g

Las funciones exponenciales donde 0 <a<1 o sea donde a es una fracción, van hacia la izquierda.

- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	$y = 2^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	1/2
2	1/4
3	1/8

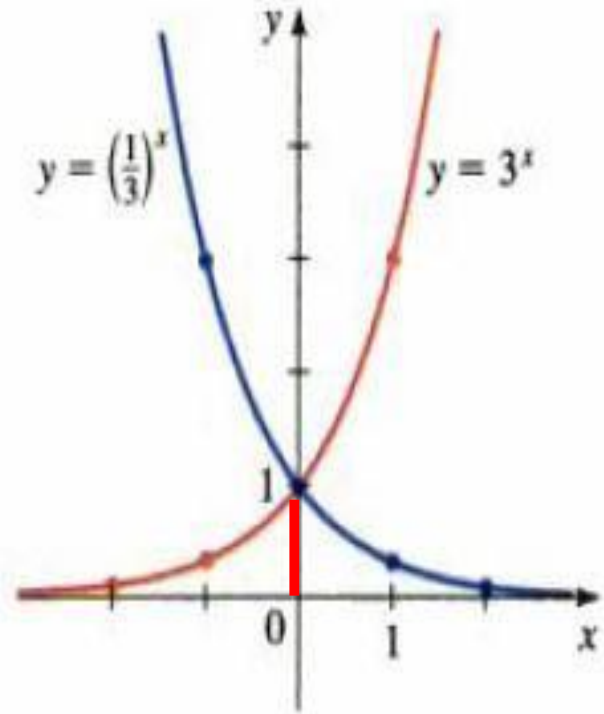


Propiedades de la función exponencial

- Gráfica de la función $\left\{\frac{1}{2}\right\}^{x}$

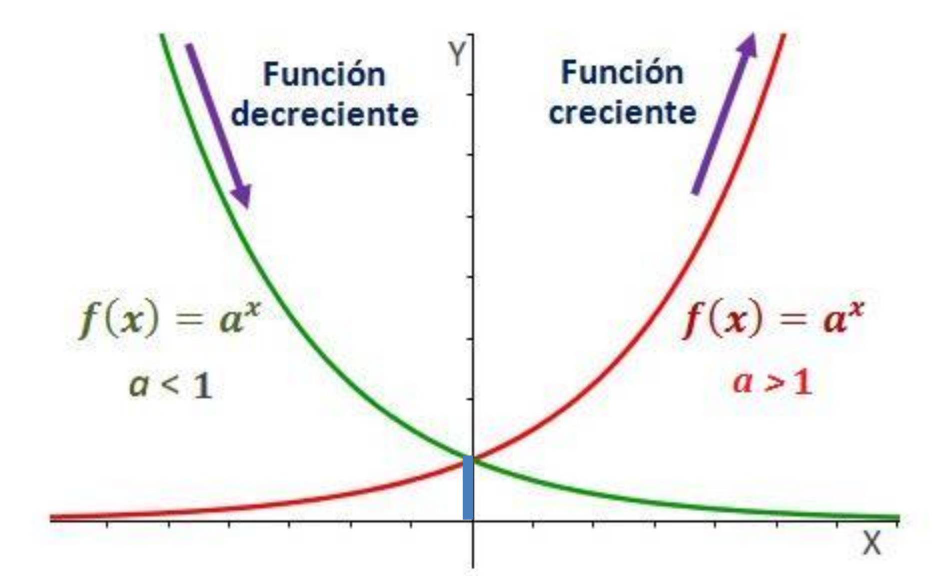
Graficación de funciones exponenciales

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$



El eje x (y=0) es una asíntota horizontal hacía la izquierda, si a>1 y hacía la derecha si a<1.

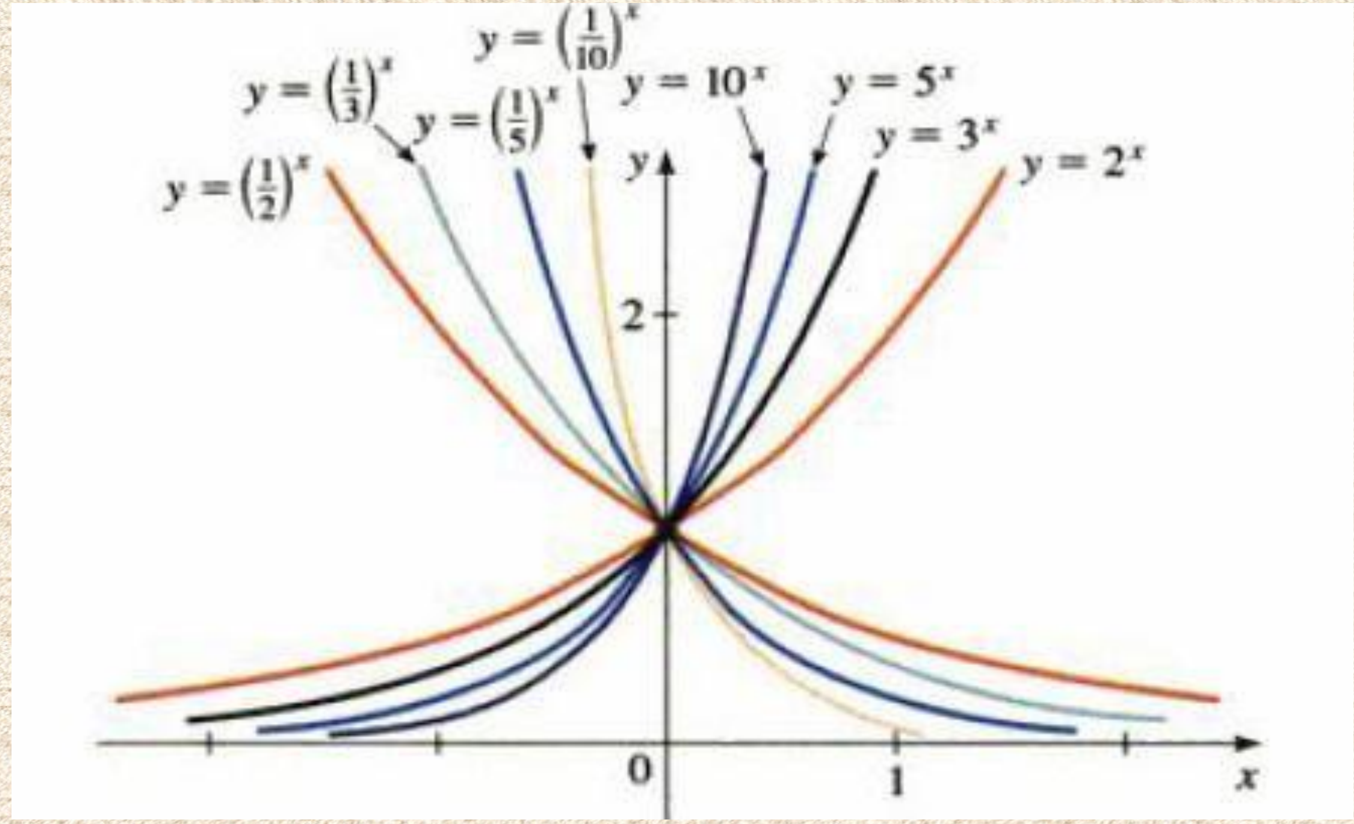
(Stewart, 2007)



http://www.universoformulas.com/matematicas/analisis/funcion-exponencial/

De las gráficas anteriores se deduce que:

- La función $y= f(x)=a^x$ crece o decrece <u>sin límite</u> con pequeños cambios en x.

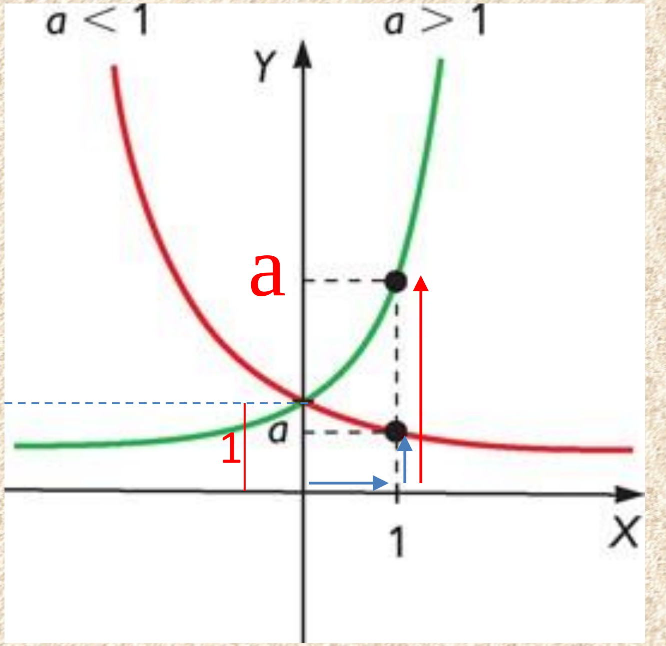


Gráfica de la familia de las funciones exponenciales

$y=f(x) = a^x$ para $a > 1$ y $0 < a < 1$

(Stewart, 2007)

- En la figura anterior se observan las gráficas de la familia de las funciones exponenciales para los dos casos.
- Todas las gráficas pasan por (0,1) al ser $a^0 = 1$ o lo que es lo mismo: el intercepto sobre el eje *y* ocurre cuando hacemos x=0



La ubicación de a en la gráfica se obtiene haciendo x=1 en la respectiva ecuación:

$$y=a^x \quad y=a^1 \quad y= \text{a} \longrightarrow \text{P}(1,\text{a})$$

Por tanto, para hallar a en la gráfica se ubica la coordenada $x = 1$ se sube en y, y donde corte la gráfica es el valor de a.

- Existen dos base que son muy usadas para las funciones exponenciales:

La base 10 y la base e o llamada natural

El número e es un número irracional famoso, y es uno de los números más importantes en matemáticas, e es la base de los logaritmos naturales y de las funciones exponenciales con base en e.

2,718281828...(y sigue...)

Se lo suele llamar el **número de Euler** por Leonhard Euler

$$f(x) = y = e^{x}$$

Función natural f(x)= $e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10 000	2.71815
100 000	2.71827
1 000 000	2.71828

Si Ud. hace cada vez más grande a n, la expresión $(1 + \frac{1}{n})^n$ *tiende a* 2.71828 …….

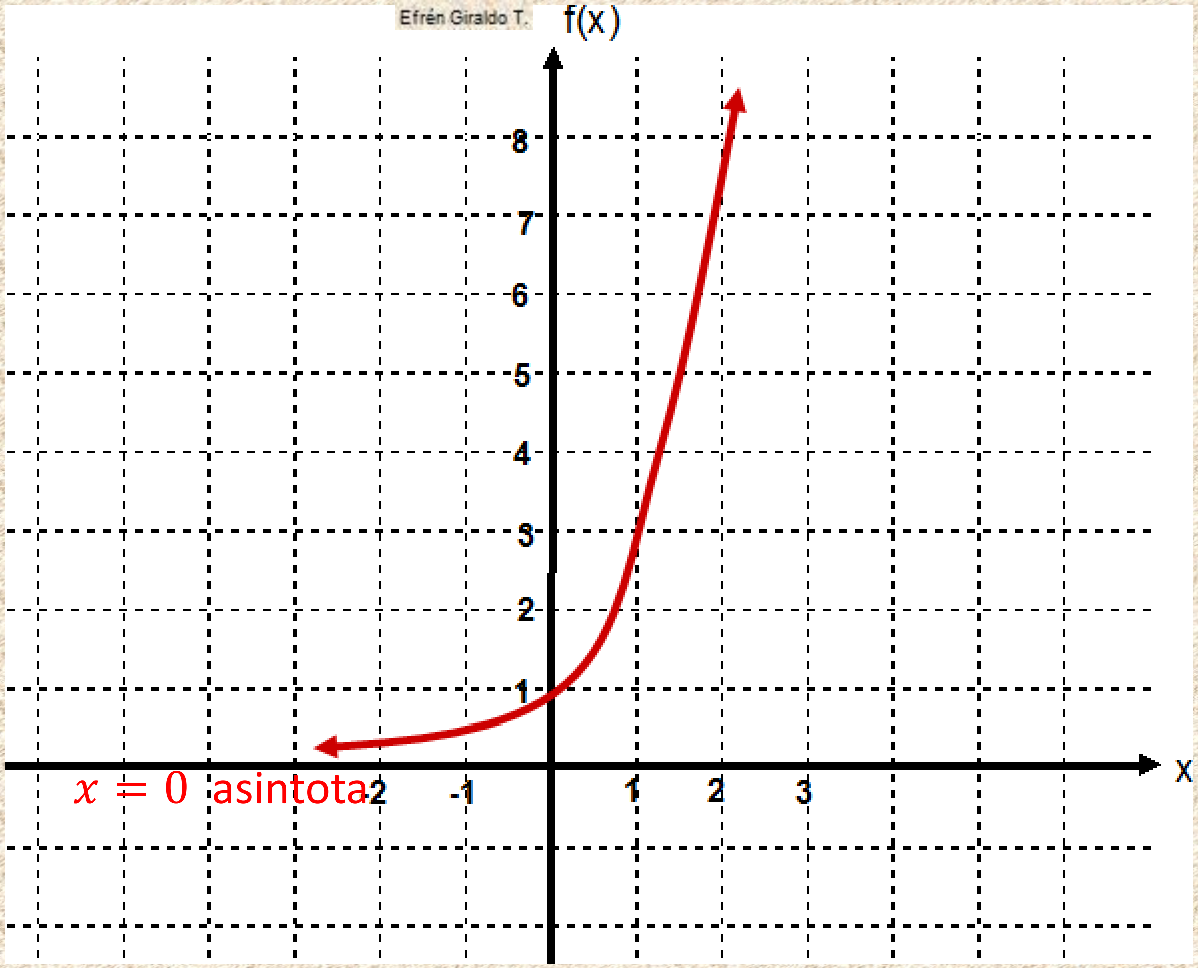
(Stewart, 2007)

$$y = e^x = \exp(x)$$

- La **función exponencial natural**, se conoce como la función e^x, donde e es el número de Euler, aproximadamente 2.71828...

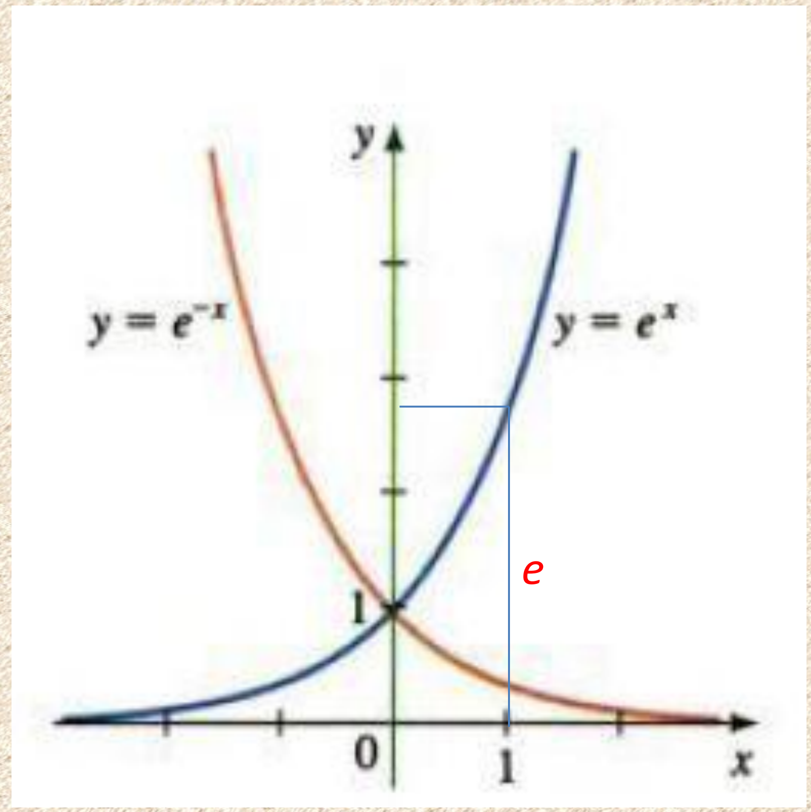
- Se denota equivalentemente como $f(x) = e^x$ o $\exp(x)$, donde e es la base de los *logaritmos naturales* y corresponde a la función inversa del *logaritmo natural*

x	e^x
-2	0.14
-1	0.37
0	1
1	2.72
2	7.39
3	20.01



Gráfica de $f(x)=e^x$

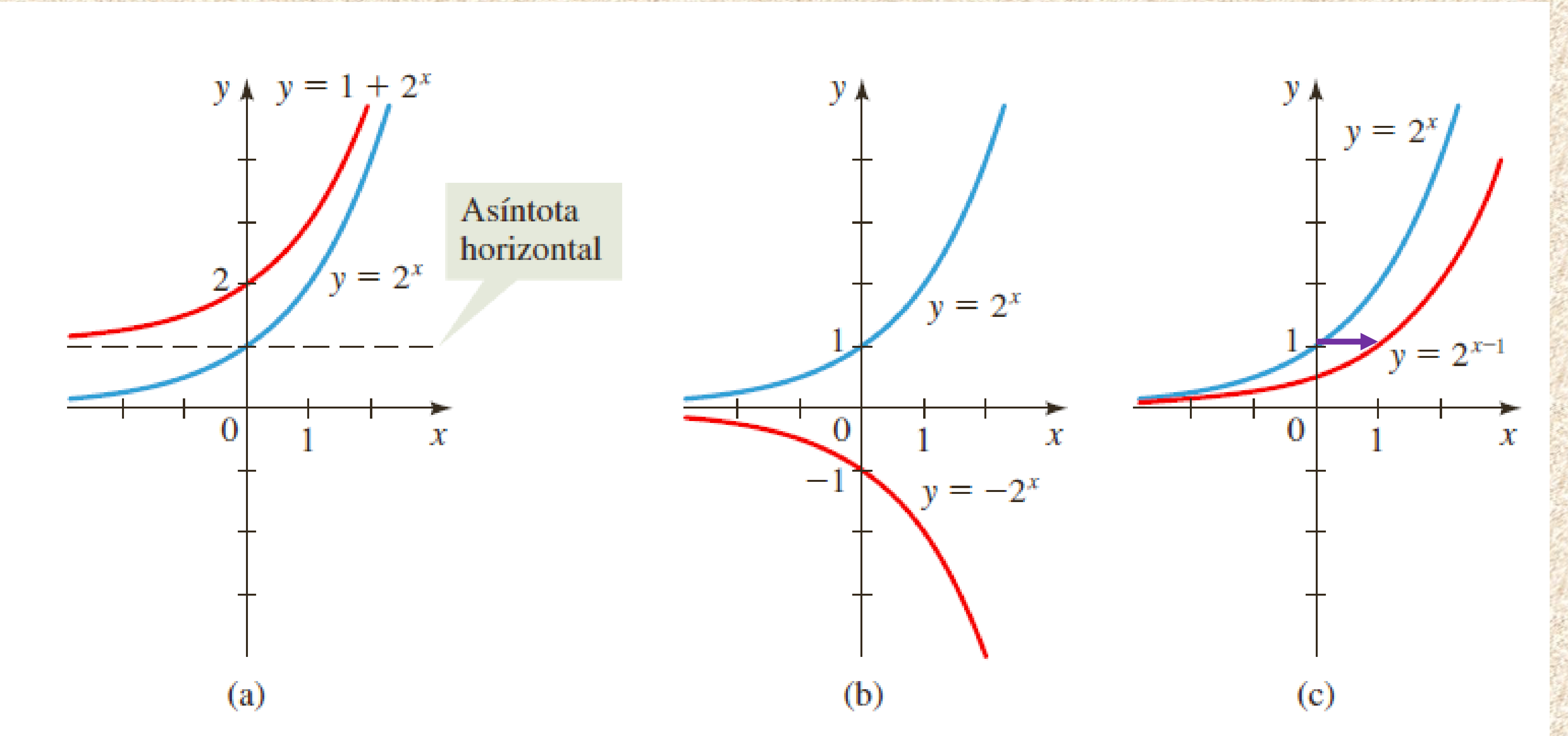
(UPC,2011)



Gráfica de e^{x} y e^{-x}

(Stewart, 2007)

Algunas trasformaciones de funciones exponenciales



- Algunas aplicaciones de las funciones exponenciales

Modelo exponencial para la diseminación de un virus

Una enfermedad infecciosa comienza a diseminarse en una ciudad pequeña con 10,000 habitantes. Después de t días, el número de personas que ha sucumbido al virus se modela mediante la función:

$$v(t) = \frac{10000}{5 + 1245 e^{-0.97t}}$$

CALCULAR:

1. Cuántas personas infectadas hay por el virus. (t = 0)

b)Calcule el número de personas infectadas despues de un día, despues de dos dias y después de cinco días.

c) Haz la gráfica de la función y describe su comportamiento.

Stewart, 2007)

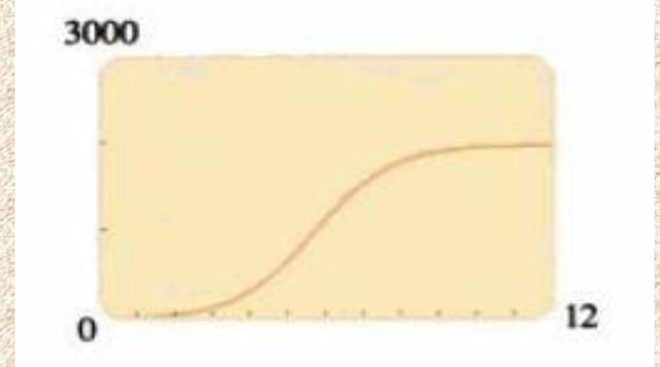
Solución

a) Puesto que $v(0) = 10\,000/(5 + 1245e^0) = 10\,000/1250 = 8$, se concluye que 8 personas tienen inicialmente la enfermedad.

b) Utilice una calculadora para evaluar $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$, y después redondee para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

(Stewart, 2007)



De la gráfica de la figura se observa que el número de personas infectadas comienza en forma lenta, luego aumenta con rapidez entre el día 3 y 8, para volverse a estabilizar cuando el número de personas infectadas a2000.

(Stewart, 2007)

Capital después de *t* años con interés compuesto

- Ci = capital inicial
- Cf = capital final
- *t* = número de años
- *r* = fracción de interés por año(es igual a dividir el interés en %, sobre 100)
- *n*= número de veces que el interés se descompone por año, o # de periodos por año.
- Después de *t* años el capital será:

$$C_f = C_i\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

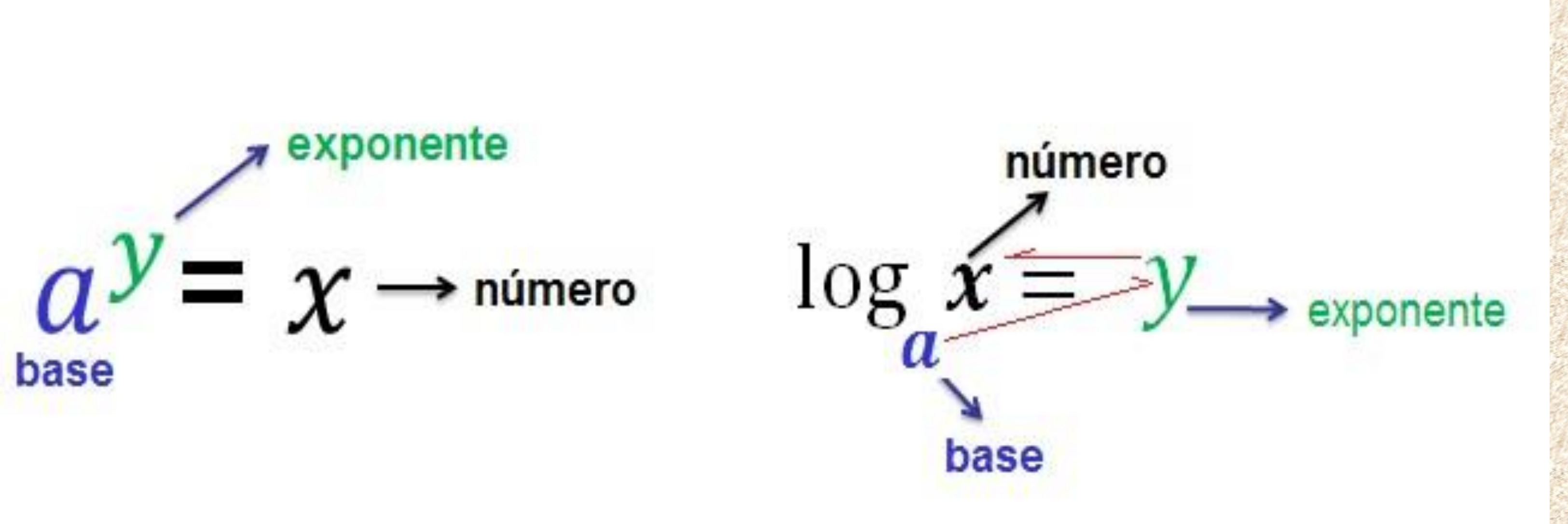
- Una suma de $1000 se invierte a una tasa de interés del 12% anual. Calcular las cantidades en la cuenta luego de 3 años, si el interés se calcula:

- a. Anualmente $r=\frac{12}{100}=0.12 \quad t=3 \quad n=1$
- b. Cada medio año $r=\frac{12}{100}=0.12 \quad t=3 \quad n=2$
- c. Trimestral $r=\frac{12}{100}=0.12 \quad t=3 \quad n=4$
- d. Mensual $r=\frac{12}{100}=0.12 \quad t=3 \quad n=12$
- e. Diario. $r=\frac{12}{100}=0.12 \quad t=3 \quad n=365$

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1+\frac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semianual	2	$1000\left(1+\frac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1+\frac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diaria	365	$1000\left(1+\frac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

(Stewart, 2007)

Función exponencial: una base a elevada a un exponente para dar un número *x*.



Función logarítmica: es el exponente al cual hay que elevar una base ***a*** para dar un número x

(Stewart, 2007)

Definición de la función logarítmica

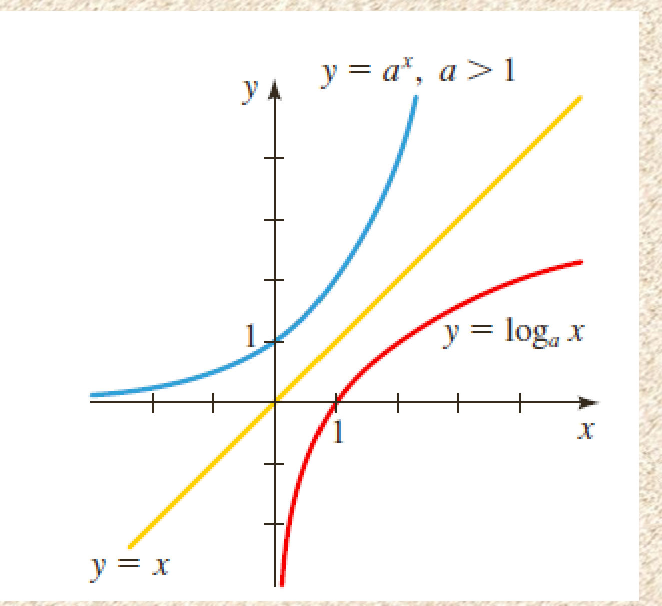
Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Así, $\log_a x$ es el *exponente* al que se debe elevar la base a para dar x.

El logaritmo de una funcion es un exponente al cual hay que elevar una base para obtener un número dado

(Stewart, 2007)



- El logaritmo es una operación inversa de la potenciación.
- Consiste en calcular el exponente cuando se conoce la base y el número.

La función logarítmica y exponencial son dos maneras de expresar lo mismo. El logaritmo da el exponente. La función exponencial da el número

Ejemplo 1 **Formas logarítmica y exponencial**

Las formas logarítmica y exponencial son ecuaciones equivalentes, si una es cierta entonces la otra también lo es. Por lo tanto, se puede intercambiar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100\,000 = 5$	$10^5 = 100\,000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

■

(Stewart, 2007)

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^5 = 100\,000$	$\log_{10} 100\,000 = 5$
$2^3 = 8$	$\log_2 8 = 3$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$	$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$
$5^r = s$	$\log_5 s = r$

(Stewart, 2007)

Ejemplo 2 Evaluar los logaritmos

a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

(Stewart, 2007)

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

(Stewart, 2007)

El logaritmo de 1, en cualquier base, es igual a cero.

$$\boxed{\log_b 1 = 0} \qquad b^0 = 1$$

Ejemplos:

1) $\log_5 1 = 0$ $\qquad 5^0 = 1$

2) $\log_7 1 = 0$ $\qquad 7^0 = 1$

LEYES DE LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C\log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

1) $\log_2 7\times 5 = \log_2 7 + \log_2 5$

2) $\log_5 25\times 4 = \log_5 25 + \log_5 4$

- x.y = z Puedo sacar lograritmo ambos lados
- $\log_a$ (x.y)= $\log_a z$

- Vale en los sentidos

Puedo quitar el log en ambos lados

- $\log_a$ (x.y)= $\log_a z \longrightarrow$ x.y = z

- $\log_a(15.x) = \log_a(1000) \longrightarrow$

- $15.x$=1000 $x =$ 1000/15

2 El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

- $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

- $$\log_2\left(\frac{8}{4}\right) = \log_2 8 - \log_2 4 = 3 - 2 = 1$$

- El logaritmo de una suma no existe
- $\log_a(x + y)\ no\ existe$.
- $\log_a(x + y) \neq \log_a x + \log_a y$

3 El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base.

- $\log_a\left(x^n\right) = n \log_a x$
- $\log_2\left(8^4\right) = 4 \log_2 8 = 4 \cdot 3 = 12$

Esta propiedad es muy importante y se usa en la resolución de ecuaciones exponenciales.

4 El logaritmo de una raíz es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz.

- $\log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n}\log_a x$
- $\log_2\left(\sqrt[4]{8}\right) = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}\cdot 3 = \frac{3}{4}$

- El logaritmo de un número negativo en cualquier base no existe (la base no puede ser –)

- $a^x = 0$ no existe
- $e^x = 0 \quad no\ existe$

5 Cambio de base:

base antigua

- $$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

nueva base

nueva base

- $$\log_2 4 = \frac{\log_4 4}{\log_4 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\log_2 3 = \frac{\log_5 3}{\log_5 2}$$

$$\log_6 21 = \frac{\log_3 21}{\log_3 6}$$

- **Logaritmo en base 10 o decimal.**
- Todo número positivo **X** **puede expresarse como una potencia de 10, es decir, se encuentra siempre un** exponente **y tal que $10^y = X$**
- **Se dice entonces que *y* es el logaritmo de X con base 10 o logaritmo decimal de X.**
- **Se puede escribir:** $\log_{10} x = y$
- **O simplemente como:** $\log x = y$

Logaritmo común

El logaritmo con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:

$$\log x = \log_{10} x$$

- Es el exponente al cual hay que elevar 10 para obtener un número x

(Stewart, 2007)

- **Logaritmo Neperiano o Natural .**
- **Existe un logaritmo muy especial en la matemática conocido como Logaritmo Neperiano cuya base es e=2,71828183… que por su importancia se conoce como Logaritmo Natural.**

Logaritmo natural

Logaritmo natural

El logaritmo con base e se llama **logaritmo natural** y se denota por **ln**:

$$\ln x = \log_e x$$

Es el exponente al cual hay que elevar e para obtener un número x

(Stewart, 2007)

Propiedades de los logaritmos naturales

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Se tiene que elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Se tiene que elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Se tiene que elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la cual e debe ser elevada para obtener x.

(Stewart, 2007)

Cálculos simples con logaritmos en la calculadora:

- Dado un número determinar su logaritmo

- Dado el logaritmo determinar el número llamado también el antilogaritmo.

En la calculadora hay dos funciones logarítmicas:

- ✓ La de los logaritmos de base decimal, vulgares o de Brigs, con la tecla [**log**], con su función exponencial equivalente , inversa o antilogaritmo, [10^x].
- ✓ Y la de los logaritmos naturales cuya base es el número **e**, con la tecla [ln] con su función inversa, o antilogaritmo, [e^x].

- Por lo tanto con la teclas [log] y [ln] determinamos el logaritmo decimal y neperiano, respectivamente, de un número dado.

- Con las funciones exponenciales o inversas $[10^x]$ y $[e^x]$ *determinamos el número o antilogaritmo* equivalente de un exponente o función logarítmica.

- Ejemplo 2: Calcular el número # o antilogaritmo que corresponden al siguiente logaritmo:
- a) log # = 1,257863 ;
- a) Teclear en la calculadora 1,257863 pulsar shift o inver (función inversa) [10^x], aparece en pantalla: 18,107688; por tanto: N = 18,107688
- 18,107688 es el número cuyo logaritmo es 1,257863
- $10^{1.257863}$ = 18,107688

- b) ln N = 2,534782
- Teclear en la calculadora 2,534782 pulsar shift o inver (función inversa) [e^x], aparece en el visor 12,613681; por tanto:
- N = 12,613681,
- Solución: 12,613681 es el número cuyo logaritmo neperiano es 2,534782.
- O $e^{2,534782} = 12,613681$

- Dado el número calcular su logaritmo.

- Ejemplo 1: Calcular: a) log 125 ; b) ln 125

- a) Teclear en la calculadora 125 pulsar [log], aparece en el display 2,09691; por tanto: log 125 = 2,09691
- b) Teclear en la calculadora 125 pulsar [ln], aparece en el visor 4,8283137; por tanto:

ln 125 = 4,8283137

- Para calcular el log en otra base diferente, la calculadora no tiene tecla pero por la fórmula del cambio de base que se vio se puede hacer.

ECUACIONES EXPONENCIALES

Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable ocurre en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

Normas para resolver ecuaciones exponenciales

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado, luego utilice las leyes de los logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

(Stewart, 2007)

$2^x = 7$	Ecuación dada
$\ln 2^x = \ln 7$	Aplique el ln en cada miembro
$x \ln 2 = \ln 7$	Ley 3 (baje el exponente)
$x = \dfrac{\ln 7}{\ln 2}$	Despeje x
≈ 2.807	Resultado de la calculadora

(Stewart, 2007)

Ejemplo 1 **Resolver una ecuación exponencial**

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, correcta hasta seis decimales.

Solución Se toma el logaritmo común de cada lado y se usa la ley 3.

$$
\begin{aligned}
3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada} \\
\log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome el log de cada lado} \\
(x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (baje el exponente)} \\
x + 2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre 3} \\
x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2} \\
&\approx -0.228756 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}
$$

(Stewart, 2007)

Ejemplo 2 **Resolución de una ecuación exponencial**

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

Solución Se divide primero entre 8 a fin de aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada} \\
e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8} \\
\ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tomar el ln de cada lado} \\
2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln} \\
x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Dividir entre 2} \\
&\approx 0.458 && \text{Resultado de la calculadora}
\end{aligned}
$$

■

(Stewart, 2007)

Ejemplo 3 Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de forma algebraica

Solución 1: algebraica

Puesto que la base del término exponencial es e, se emplean logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$
\begin{aligned}
e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada} \\
\ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome el ln de cada lado} \\
3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln} \\
2x &= 3 - \ln 4 && \\
x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 &&
\end{aligned}
$$

(Stewart, 2007)

Resolver una ecuación logarítmica algebraicamente

Resuelva la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$ de forma algebraica y gráfi

Solución 1: algebraica

Primero se combinan los términos logarítmicos usando las leyes de los logaritm

$\log[(x + 2)(x - 1)] = 1$	Ley 1
$(x + 2)(x - 1) = 10$	Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)
$x^2 + x - 2 = 10$	Desarrolle el lado izquierdo
$x^2 + x - 12 = 0$	Reste 10
$(x + 4)(x - 3) = 0$	Factorice
$x = -4 \quad \text{o} \quad x = 3$	

Se comprueban estas posibles soluciones en la ecuación original y se encuentra que $x = -4$ no es una solución (porque no están definidos los logaritmos de números negativos), pero $x = 3$ es una solución. (Véase *Compruebe sus respuestas*.)

(Stewart, 2007)

Ejemplo 6 Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación despeje x.

a) $\ln x = 8$ b) $\log_2(25 - x) = 3$

Solución

a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

Este problema se puede resolver también de otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$
$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$
$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o elevar 2 a cada lado)}$$
$$25 - x = 8$$
$$x = 25 - 8 = 17$$

Compruebe su respuesta

Si $x = 17$, se obtiene

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✓

(Stewart, 2007)

Ejemplo 7 Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

Solución Se aísla primero el término logarítmico. Esto permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$4 + 3\log(2x) = 16$	Ecuación dada
$3\log(2x) = 12$	Reste 4
$\log(2x) = 4$	Divida entre 3
$2x = 10^4$	Forma exponencial (o eleva 10 a cada lado)
$x = 5000$	Divida entre 2

Compruebe su respuesta

Si $x = 5000$, se obtiene

$$\begin{aligned} 4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10\,000 \\ &= 4 + 3(4) \\ &= 16 \quad ✓ \end{aligned}$$

(Stewart, 2007)

a) $\mathbf{\log x + \log 20 = 3}$

El logaritmo de la suma se transforma en producto.

Hacemos SHIFT log 3 = 1000. Relación y resolvemos.

$$\log x + \log 20 = 3 \Leftrightarrow \log 20 \cdot x = \log 1000$$

$$20x = 1000 \quad \Rightarrow x = 50$$

Solución: $x = 50$

b) $\mathbf{\log x^3 = \log 6 + 2\log x}$

$$\log x^3 = \log 6 + \log x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \log x^3 = \log 6x^2 \quad \Leftrightarrow x^3 = 6x^2 \quad \Rightarrow x^3 - 6x^2 = 0$$

$$x^2(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \text{ no es solución de la ecuación logarítmica. No existe } \log 0. \\ x_2 = 6 \text{ es solución.} \end{cases}$$

Solución: $x = 6$

c) $2\log x = \log(10 - 3x)$

$$2\log x = \log(10 - 3x) \Leftrightarrow \log x^2 = \log(10 - 3x) \Rightarrow x^2 = 10 - 3x$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Comprobamos si las soluciones tienen sentido, sustituyendo en la ecuación logarítmica.

$x_1 = 2 \Rightarrow 2\log 2 = \log(10 - 3\cdot 2) \Rightarrow 2\log 2 = \log 4 \Rightarrow 2\log 2 = 2\log 2 \Rightarrow x = 1$ es solución

$x_2 = -5 \Rightarrow 2\log(-5)$. El $\log(-5)$ no tiene sentido. $\Rightarrow$ $x = -5$ no es solución.

Solución: $x = 2$

d) $\log 4 + 2\log(x - 3) = \log x$

$$\log\left[4\cdot(x-3)^2\right] = \log x \Leftrightarrow 4\cdot\left(x^2 - 6x + 9\right) = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow \log 4 + 2\log 1 = \log 4 \Rightarrow x = 4 \text{ es solución.} \\ x_2 = \frac{9}{4} \rightarrow \log 4 + 2\log\underbrace{\left(\frac{9}{4} - 3\right)}_{\text{negativo}} = \log\frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{9}{4} \text{ no es solución} \end{cases}$$

Solución: $x = 4$

Bibliografía

- Hernández, E. (2011) . http://www.google.com.co/#sclient=psy-ab&hl=es&rlz=1W1RNRN_es&source=hp&q=funciones%20exponenciales%20ppt&rlz=1R2ADRA_esCO438&pbx=1&oq=&aq=&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&fp=39afdc64bfd2753e&biw=1280&bih=588&pf=p&pdl=500

- UPC: Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas. (2011). Función exponencial y logarítmica.
- http://www.google.com.co/#sclient=psy-ab&hl=es&rlz=1W1RNRN_es&source=hp&q=funciones%20exponenciales%20ppt&rlz=1R2ADRA_esCO438&pbx=1&oq=&aq=&aqi=&aql=&gs_sm=&gs_upl=&fp=39afdc64bfd2753e&biw=1280&bih=588&pf=p&pdl=500

- A. Barriga . (2011). Sal e s i a n o s A l a m e d a. La gratitud nacional – Liceo Juan Bosco. *Departamento de*
- *matemáticas.*
- *Stewart. (2007). Precálculo.*