Continuidad

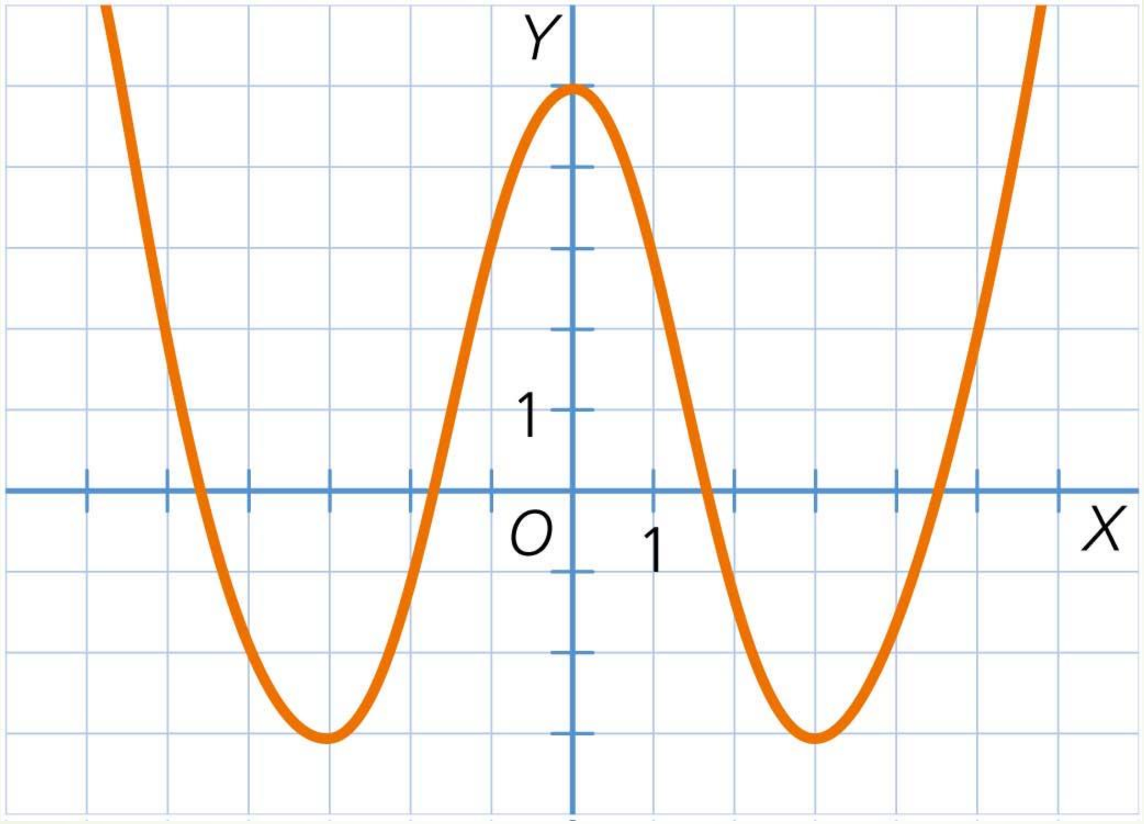
2

❖MIS VALORES

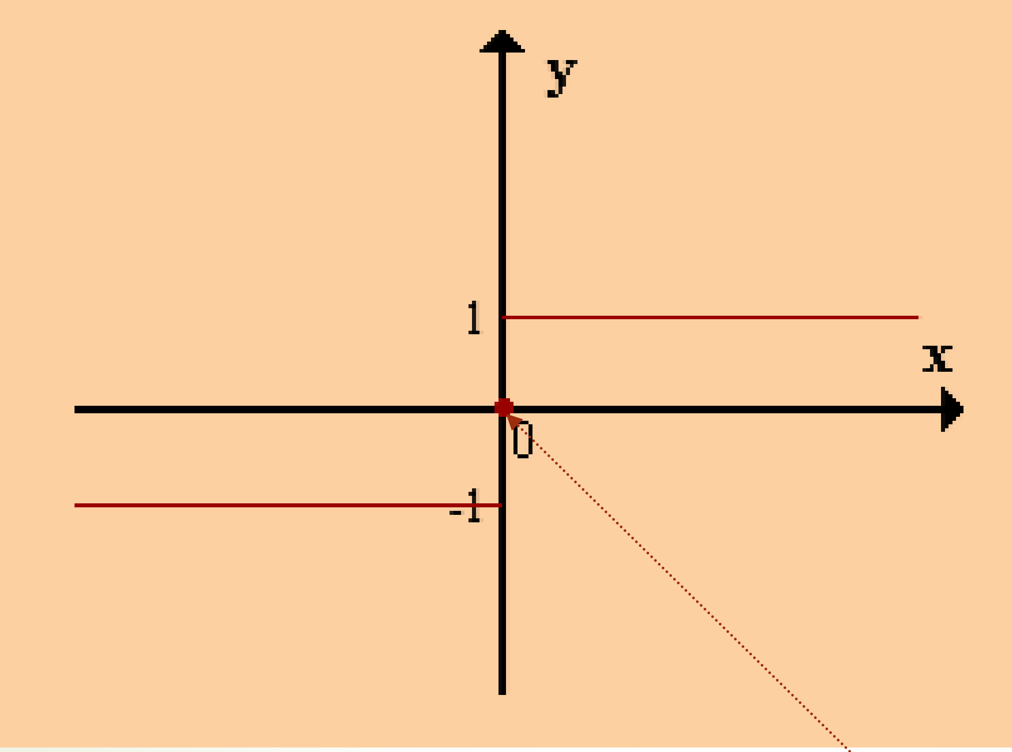
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

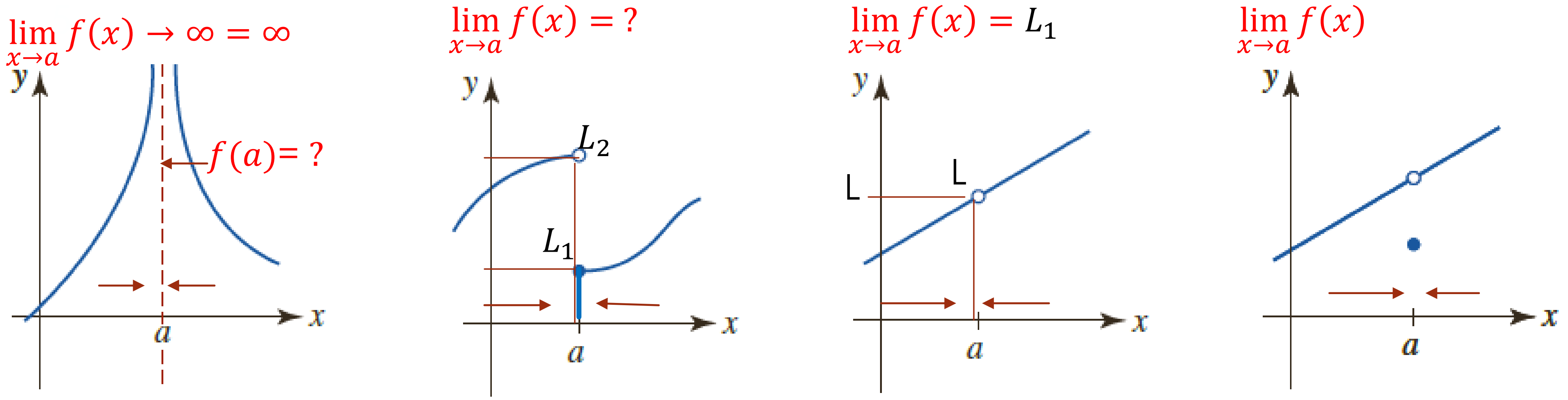
❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.



- Intuitivamente, la continuidad significa que un pequeño cambio en la variable x implica un pequeño cambio en el valor de f(x), es decir, la gráfica consiste de un sólo trozo de curva. Si se dibujara la curva lo podríamos hacer sin retirar en ningún momento el lápiz del papel.



En contraste, una gráfica como esta, consiste de pedazos de curva separados por un vacío en x=0, implica que exhibe allí una discontinuidad, un salto.



a) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

b) $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

c) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

d) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

Definición 2.3.1 Continuidad en a

Se dice que una función f es **continua en un número a** si cumple las 3 condiciones siguientes:

i) $f(a)$ está definido, *ii*) $\lim_{x \to a} f(x)$ existe y *iii*) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que f es **discontinua** en el número a.

Continuidad por la izquierda en un punto de abscisa a

Una función f(x) es continua por la izquierda en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuidad por la derecha en un punto de abscisa a

Una función f(x) es continua por la derecha en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

- Por tanto, las condiciones para continuidad en un punto a son:

1. La función debe de estar definida en el punto en cuestión.
2. Debe tener límite en ese punto por los dos lados.
3. El valor obtenido en 1 debe de ser igual al obtenido en 2.

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

$$a)\quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$f(1) = \frac{1^3 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Solución

a) f es discontinua en 1 puesto que al sustituir $x = 1$ en la función se obtiene $0/0$. Se afirma que $f(1)$ no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 2.3.1.

f (x)=$\frac{x^3-1}{x-1}$ miremos si f(1) existe o está definido

f (1) se define en la función original (tal cual) sin transformar.

f (1)=$\frac{1^3-1}{1-1} = \frac{0}{0}$ ⟶ la función no está definida en $x = 1$.

La función no está definida en x =1, por tanto no cumple la primera condición.

Función anterior corregida

Determine si la siguiente funcion es continua en 1.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \rightarrow g(1)=2 \rightarrow P(1,2)$$

b) Debido a que g está definida en 1, es decir, $g(1) = 2$, a continuación se determina si $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe. Por

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3 \qquad (1)$$

Recuerde de álgebra que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

concluimos que $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe y es igual a 3.

Note que la función en $x = 1$ es un punto de coordenadas P(1,2)

1. g(1)=2
2. $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$ El límite existe (es 3)

Se cumplen las condiciones 1 y 2.
Ahora, si comparo los valores de 1. y 2. son diferentes.
El límite de $g(x) = 3$ no es igual a $g(1) = 2$ que es la condición 3.
Por tanto, la función no es continua en P(1,2).

Función nuevamente corregida

Determine siguiente funcion es continua en 1.

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}.$$

$P(1{,}3)$

$h(1)?$

$h(1) \; = 3$

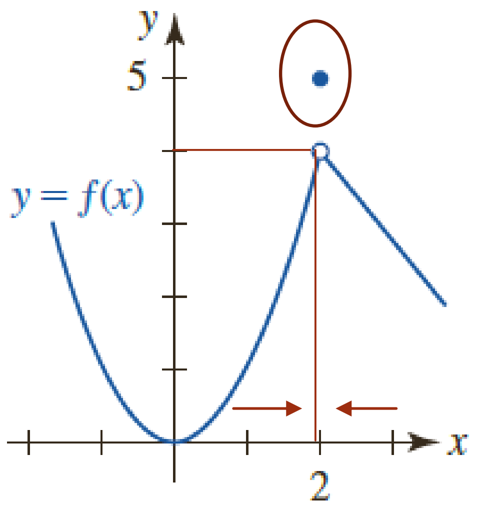
Por los análisis anteriores y con la nueva definición en x=1 → h(x)= 3

1. $h(1) = 3$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

2. $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$

3. $h(1) = 3$ es igual a $\lim_{x \to 1} g(x) = 3$, la función es continua.



Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x+6, & x > 2. \end{cases}$$

$f(2)=5$

P(2,5)

Solución Primero, observe que $f(2)$ está definida y es igual a 5. Luego, por

Segundo:
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (-x+6) = 4 \end{array}\right\} \text{implica } \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

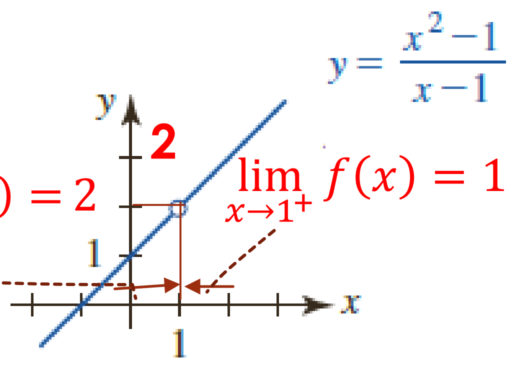
$\neq$

Tercero: $f(2)=5$ # $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

No hay continuidad

Discontinuidad removible

$$f(1) = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$



a) No es continua en 1

$$\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right) = \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}$$

$$= x + 1 = 1 + 1 = 2$$

- Si $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) \text{ existe}}$ pero f no está definida en $x = a$ o $f(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** en a.

Por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en $x = 1$ pero $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.

Si el límite existe en a y hay un hueco en a, o la función presenta dos valores diferentes de límites en a, se tiene una discontinuidad que se puede remover.

Removiendo el hueco o la discontinuidad: se redefine el dominio y rango

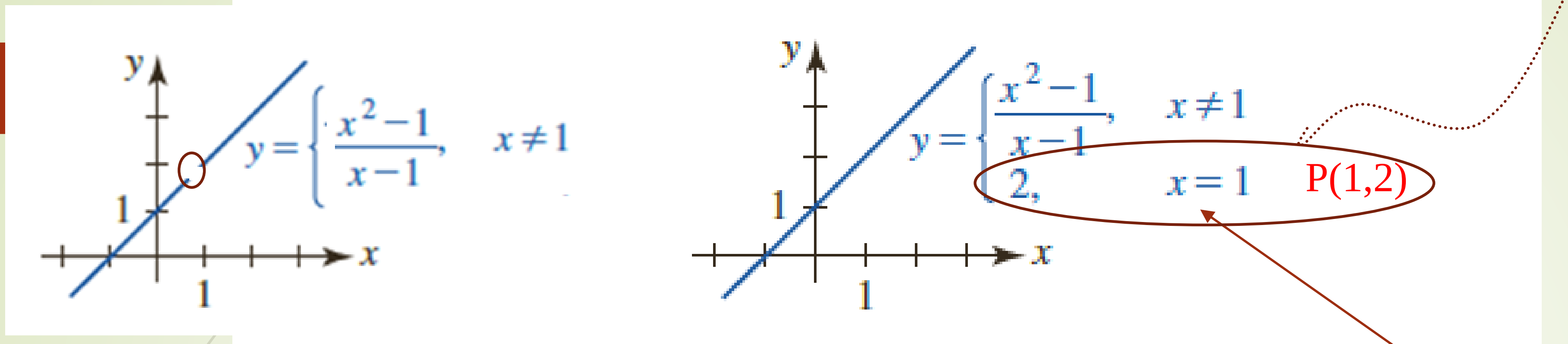


FIGURA 2.3.6 *b*) Continua en 1 Discontinuidad removible en $x = 1$

Al *definir* $f(1) = 2$, la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, \longleftarrow & x = 1 \end{cases} \qquad \text{P(1,2)}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 2.3.6.

En ocasiones es importante analizar el intervalo de una función, aunque fuera del intervalo la función no sea continua.

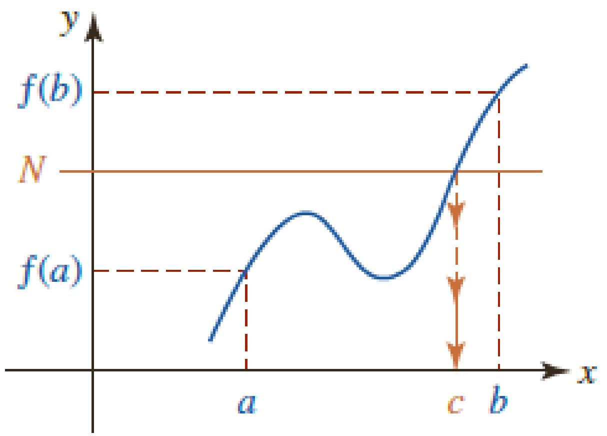


FIGURA 2.3.7 Una función continua f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Definición 2.3.2 Continuidad sobre un intervalo

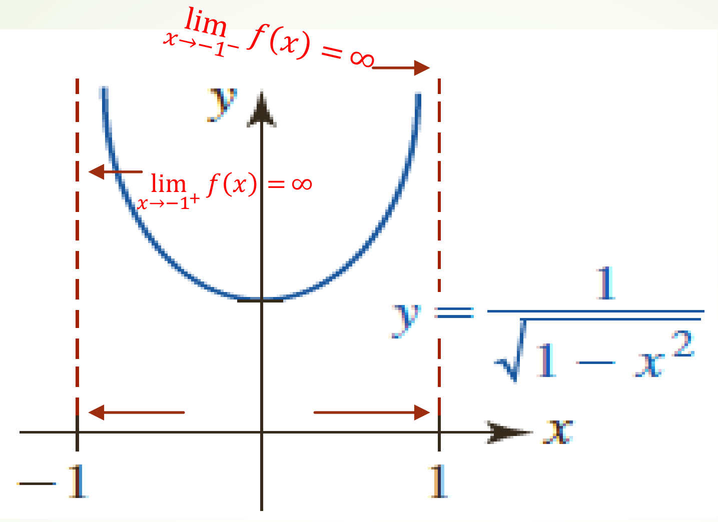
Una función f es continua

i) sobre un **intervalo abierto** (a, b) si es continua en todo número en el intervalo; y
ii) sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b) y, además,

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Analizar la continuidad de la función y= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en el intervalo abierto

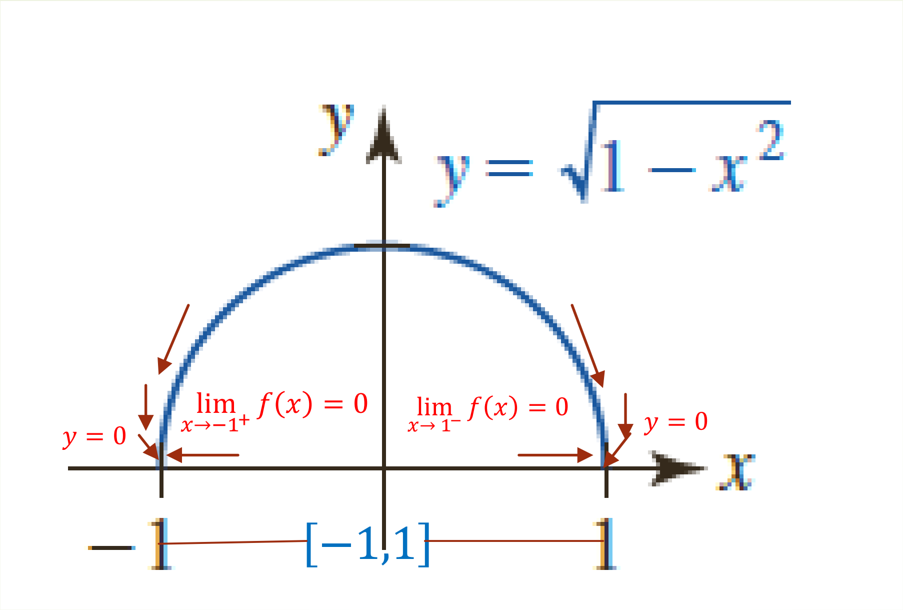
$$\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{0} = \infty$$



(-1,1)

Se observa en la gráfica que la función cubre el intervalo entre -1 y 1, sin tomar ninguno de estos 2 valores (por las asíntotas y la función no estar definida). Se puede acercar tanto como se quiera a -1 y a 1, pero sin tomar ninguno de los dos. Es continua en el intervalo (-1,1) aunque el límite en los extremos es ∞, *no existe*.

Si se toma el intervalo cerrado $[-1,1]$ ya no es continua porque la función no incluye los puntos extremos -1 y 1 en el dominio y en el rango y además no existe el límite en los extremos.



En cambio, la función de esta gráfica, corresponde a un intervalo cerrado $[-1,1]$, pues toma los valores extremos -1 y 1. y el límite para ambos extremos existe y es igual a 0. Note que mientras x tiende a 1, la función tiende a 0 y mientras tiende a -1 el límite es también 0 .

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre $[-1, 1]$. Observe por la figura 2.3.4*b*) que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ y } \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

$f(x) = \sqrt{x - 1}$ es continua sobre el intervalo no acotado $[1, \infty)$, ya que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x \to a}(x - 1)} = \sqrt{a - 1} = f(a),$$

para cualquier número real a que cumpla $a > 1$, y f es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} = f(1) = 0.$$

Discontinuidad infinita ∞: si presenta asíntotas verticales

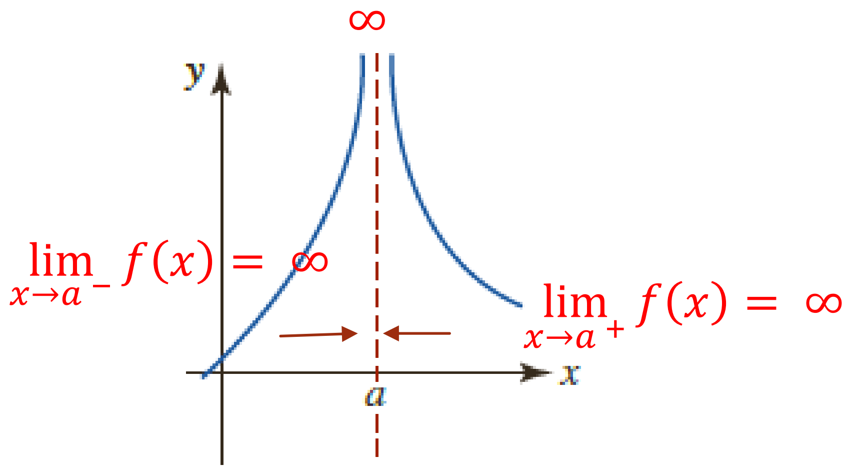


FIGURA 2.3.1 $a)$ $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

▮ **Terminología** Una discontinuidad de una función f a menudo se denomina de manera especial.

- Si $\boxed{x = a \text{ es una asíntota vertical}}$ para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en a.

La figura 2.3.1a) ilustra una función con una discontinuidad infinita en a.

Discontinuidad finita o tipo salto: si tiene dos límites cuando x tiende a un mismo valor

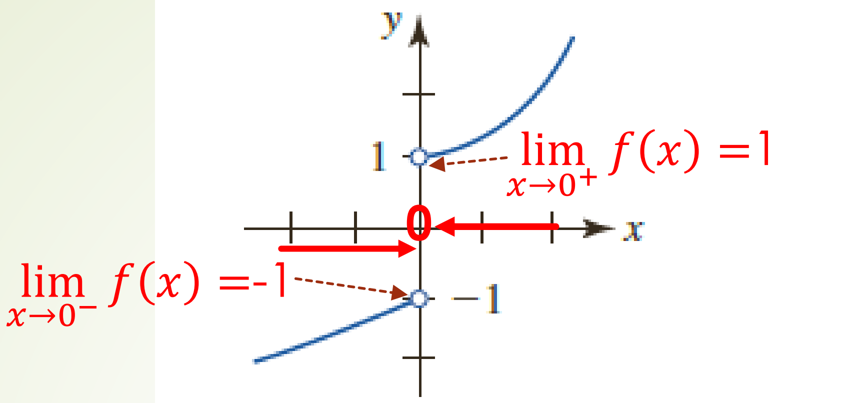


FIGURA 2.3.5 Discontinuidad tipo salto en $x = 0$

Los dos límites por los 2 lados deben se diferentes

- Si $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto en** a.

La función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 2.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$.

Note que la función no toma los valores 1 y -1. Cuando x tiende a 0 (0^-) por la izquierda ella tiende a -1 y cuando x tiende a 0 (0^+) por la derecha, ella tiende a 1.

Si la función tiene 2 valores diferentes de límites para un mismo valor a de x, presenta una discontinuidad tipo salto.

En realidad lo que quiere decir lo anterior, es que si cierta función tiene un límite por un lado (por debajo o a^{-}) y tiene un límite diferente por el otro lado (por encima a^{+}) cuando x tiende a un valor dado a, la función tendrá un salto.

Teorema 2.3.1 Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones f y g son continuas en un número a, entonces la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g $(g(a) \neq 0)$ son continuos en $x = a$.

Continuidad de una suma, producto y cociente Cuando dos funciones f y g son continuas en un número a, entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en a. En el caso de la división *f/g* es necesario, por supuesto, requerir que $g(a)$ sea $\neq 0$