Movimiento rectilíneo
Razones de cambio

“Todo debe hacerse lo más simple posible, pero no más simple."- Albert Einstein

❖MIS VALORES
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Una **razón matemática** es un **vínculo entre dos magnitudes** que son comparables entre sí. Se trata de aquello que resulta cuando una de las magnitudes o variables se divide por otra.

Por ejemplo, si se tiene la densidad del agua:

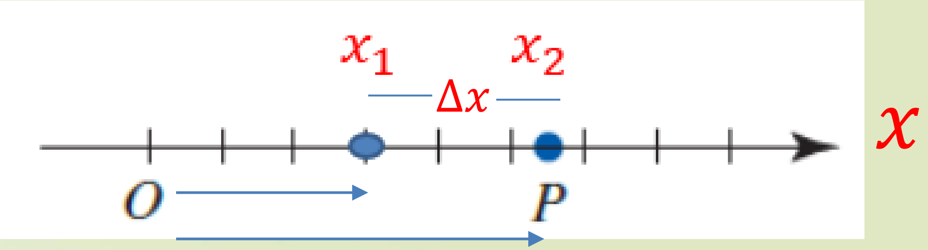
$$\frac{1000kg}{m^3}$$

Significa que en cada (un) metro cúbico de agua hay 1000 kilogramos de masa.

$14{,}6\,\frac{lbsf}{pul^2}$ significa que por cada pulgada cuadrada existe una fuerza de 14,6 lbf. $6\,\frac{m}{s}$: cada segundo se recorren 6 metros.

Generalmente las unidades de medida en el denominador van en forma unitaria: 1 minuto, una pul^2, 1 segundo, lo cual facilita la comparación.

Si un móvil se mueve en la dirección x



Si x varía de x_1 a x_2, entonces el cambio en x es

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Una razón de cambio.

Si existe también un cambio en y, se denota por $y_2 - y_1$

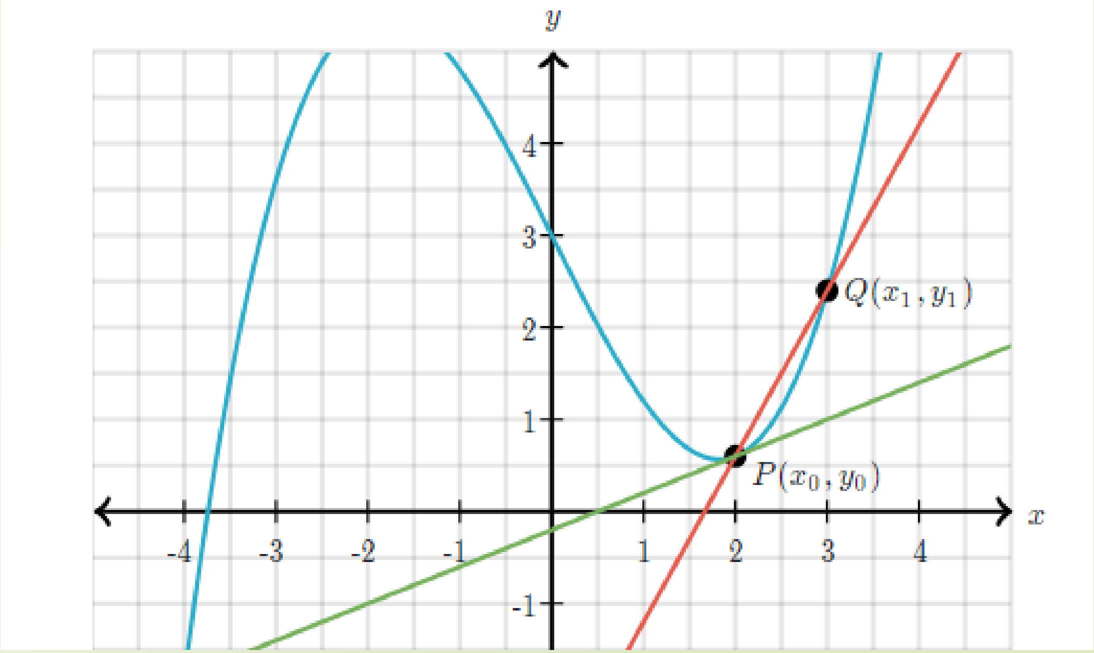
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

Ahora, si se relaciona de alguna manera y con x, o y es función de x se tendrá:

$$\frac{\text{cambio en y}}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

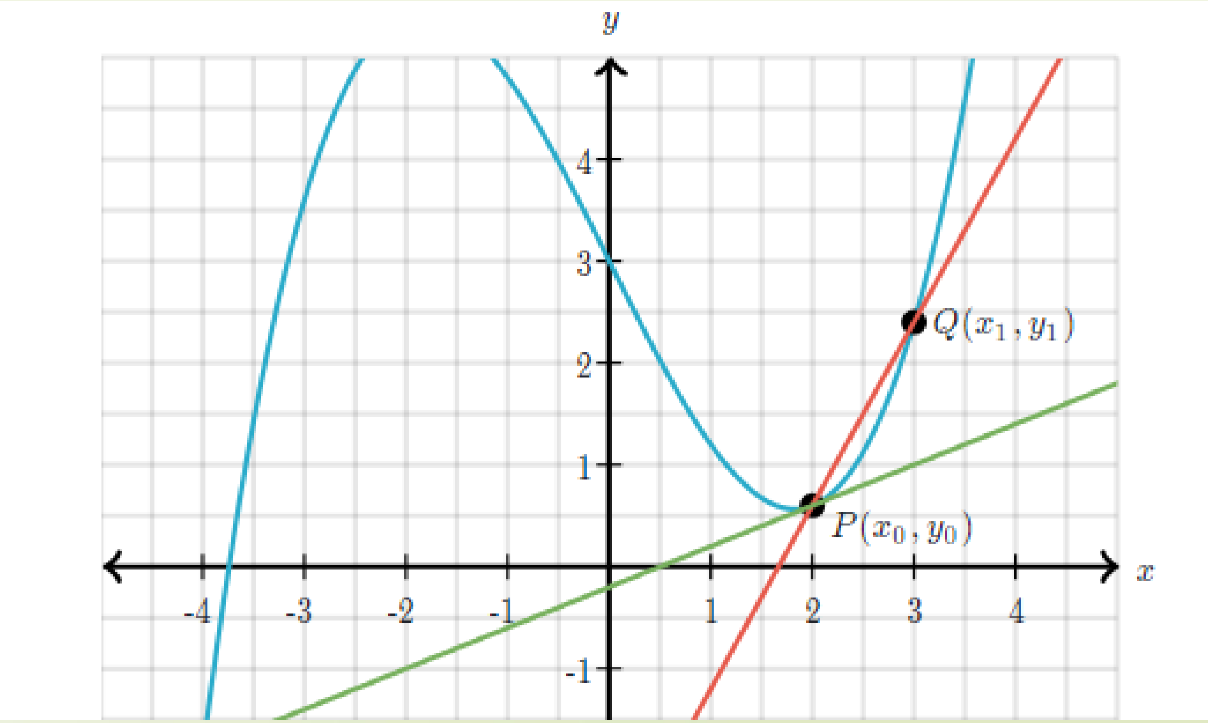
La pendiente m es también una razón matemática, más exactamente una razón de cambio: cambio en y con respecto a x.

Rectas secante y tangente



Si dos puntos distintos $P(x_0, y_0)$ y $Q(x_1, y_1)$ están sobre la curva $y = f(x)$, la pendiente de la recta secante que conecta los dos puntos es

https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/derivative-intro-dc/using-the-formal-definition-of-derivative-dc/a/tangent-lines-and-rates-of-change



$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = m$$

La pendiente $\Delta y / \Delta x$ de la recta secante que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_1, f(x_1))$ se denomina **razón de cambio media de la función** f sobre el intervalo $[x_0, x_1]$.

La *razón de cambio* se refiere a la medida en la cual una **variable** *cambia* con respecto a otra.

Explica cómo una variable cambia con respecto a otra: es decir, es una razón matemática que compara el cambio de la variable y con respecto a la variable x.

El objetivo principal del cálculo diferencial es calcular la razón de cambio de una cantidad con respecto a otra.

Razón de cambio media (de una variable respecto a otra) es la magnitud del cambio de una variable por unidad de cambio de la otra en un intervalo dado. (También se le llama tasa de cambio.) Si las variables no tienen ninguna dependencia la tasa de cambio es cero.

Es posible distinguir entre dos tipos de razón de cambio:

- *La razón de cambio **promedio*** **ya vista: da el cambio de una variable con respecto a otra en un intervalo dado.**

- Y la *razón o tasa de cambio **instantánea***: esta es ni más ni menos la derivada: es la variación de una variable con respecto a otra en un *instante dado.*

De esta manera, <u>la razón de cambio instantánea es la interpretación fundamental de la derivada de una función.</u>

Justamente, el propósito del cálculo diferencial es la matemática de los cambios.

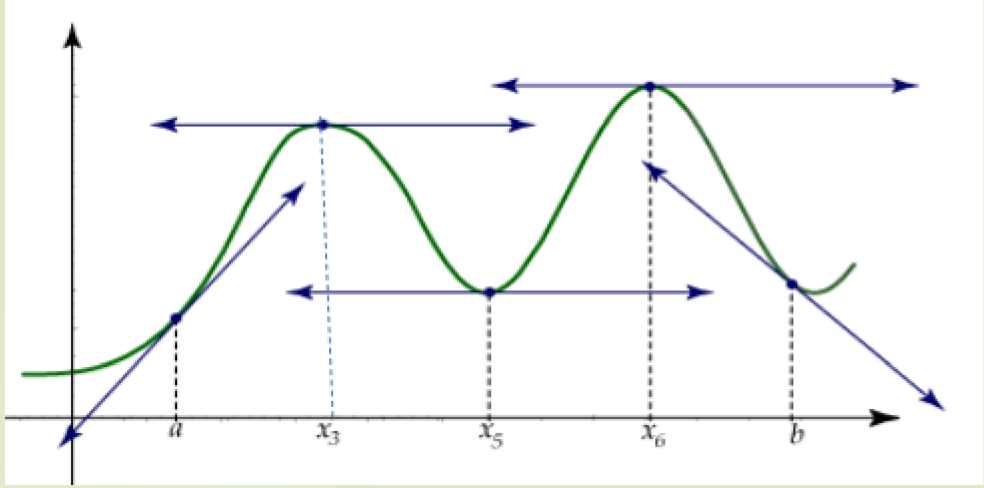
“*Determinar razones de cambio de procesos* continuos es muchas veces más importante que estudiar los procesos en si.

Siempre que dos variables están conectadas mediante una relación funcional –función–, se puede estudiar el cambio relativo de la magnitud de una variable con respecto a la magnitud de la otra”.

http://funes.uniandes.edu.co/4318/1/SantoyoInterpretaci%C3%B3nALME2012.pdf

“Son tan amplios los ejemplos de aplicación de la derivada en la vida cotidiana, –no sólo en ciertas situaciones técnicas de ingeniería– que éste debería ser un concepto de conocimiento general para comprender ciertos aspectos básicos del mundo que nos rodea y en el cual necesitamos movernos; prácticamente se aplica en todos los campos de las ciencias en donde interesa el cambio relativo de una magnitud con respecto a otra. Esto puede ser importante para determinar los resultados de un proceso o ayudarnos para pronosticar el futuro del mismo”.

http://funes.uniandes.edu.co/4318/1/SantoyoInterpretaci%C3%B3nALME2012.pdf



La derivada tiene dos interpretaciones:

- La interpretación Geométrica: es la pendiente *m* de la recta tangente a la curva en un punto dado. Y además de ser la pendiente m en un punto dado, es importante analizar como varía esa pendiente de un punto a otro de la curva.

- La interpretación Física: es ver cómo es la variación instantánea (en un instante) de una magnitud dependiente con respecto a otra que es independiente.
Y se interpreta a partir de las unidades, de la misma manera como se interpretó la razón de matemática.

Qué es la derivada?

Si alguna cantidad o variable está cambiando con el tiempo (por ejemplo, la altura de un vehículo de lanzamiento despegando hacia el espacio, el valor del índice Dow Jones, o tu posición a lo largo de una carretera) entonces su *derivada* en cada instante de tiempo es su *velocidad* en ese instante de tiempo. Algunas ejemplos rápidos:

- Si un vehículo de lanzamiento está subiendo a razón de 100 metros por segundo, entonces la derivada de su altura (la variación de su altura) es la velocidad actual: 100 m/s.

- Si el índice Dow Jones estaba cayendo en picado a razón de 200 puntos por minuto al mediodía, entonces su derivada al mediodía era −200 puntos/min. (velocidad negativa indica disminución).

- Si, en este momento, estás 20 millas a lo largo de una carretera y tu posición a lo largo de la carretera está aumentando a una razón de 80 millas por hora, entonces su derivada en este momento es tu velocidad actual: 80 mph. El *velocímetro* es el instrumento práctico que mide esta derivada.

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutDerivNum.html?lang=es&game=true

Siempre que la función $y = f(x)$ tenga una interpretación específica en una de las ciencias, su derivada tendrá una interpretación específica como razón de cambio.

las unidades de dy/dx son las unidades correspondientes a y divididas por las de x.

¿Cuán rápido varía una cantidad o una variable? En general, una razón de cambio con respecto al tiempo es la respuesta a esta pregunta.

Si *una variable* *y* cambia en el tiempo, entonces la derivada $\frac{dy}{dt}$ ***mide la rapidez con que*** y *está aumentando o disminuyendo* en el instante *t*:

Si Q es una cantidad que cambia en el tiempo, entonces la derivada $\frac{dQ}{dt}$ mide la rapidez con que Q está aumentando o disminuyendo en el instante t.

La razón de cambio más entendible y más frecuente es la **velocidad promedia**, que se calcula dividiendo un trayecto recorrido por una unidad de tiempo.

Esto quiere decir que la velocidad se entiende a partir del vínculo que se establece entre la **distancia** y el **tiempo.**

Y si ese cambio de espacio (espacio final menos espacio inicial) se produce a partir de un tiempo inicial hasta un tiempo final, (se relaciona con el tiempo) el cambio en el tiempo es: tiempo final - tiempo inicial; la razón promedio dará una velocidad media o promedia.

Física

Si $s = (t)$ es la función posición de una partícula que se mueve en una línea recta, entonces $\Delta s/\Delta t$ representa el promedio de la velocidad en un periodo Δt, y $v = ds/dt$ representa la **velocidad** instantánea (la razón de cambio del desplazamiento respecto al tiempo). La razón de cambio instantáneo de la velocidad respecto al tiempo es la **aceleración**: $a(t) = v'(t) = s''(t)$. ahora que conocemos las formulas de derivación, podemos resolver con más facilidad problemas que involucran el movimiento de objetos.

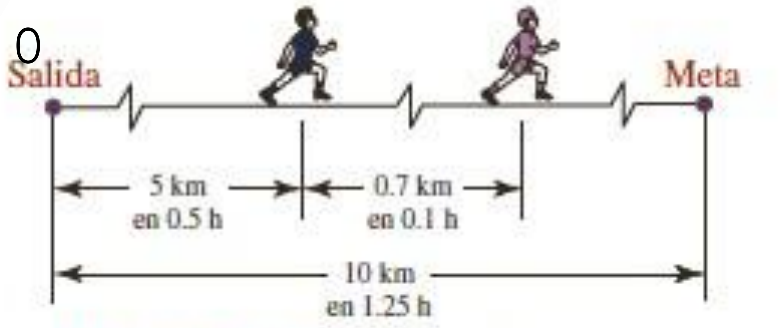


FIGURA 2.7.10 Corredor en una carrera de 10 km

Velocidad media En general, la **velocidad media** o **rapidez media** de un objeto en movimiento está definida por

$$v_{pro} = \frac{\text{cambio en distancia}}{\text{cambio en tiempo}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \frac{\text{espacio final} - \text{espacio inicial}}{\text{tiermpo final} - \text{tiempo inicial}}$$

Considere un corredor que termina una carrera de 10 km en un tiempo de 1 h 15 min (1.25 h). La velocidad media del corredor, o rapidez media de la carrera, fue

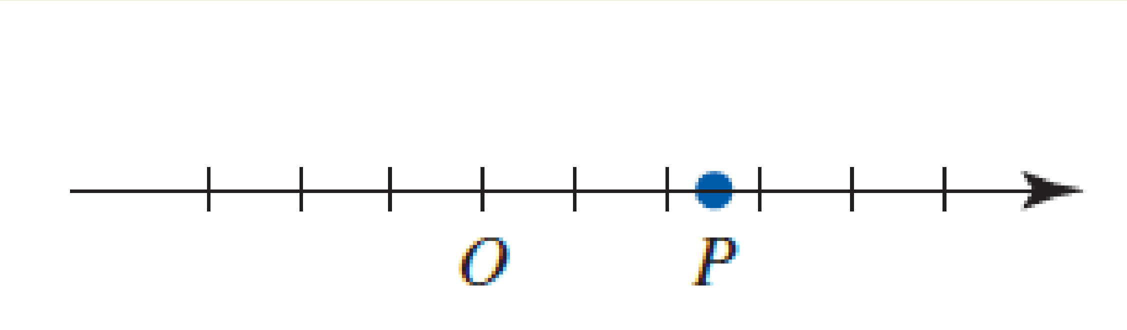
$$v_{pro} = \frac{10 - 0}{1.25 - 0} = 8 \text{ km/h}.$$

Considérese un movimiento en un línea recta de una partícula a través del tiempo. A cada valor del tiempo "t" le corresponde un cierto desplazamiento "s" de la partícula; luego la distancia recorrida es función del tiempo, es decir, s depende del tiempo "t" o lo que es lo mismo: $s = f(t)$

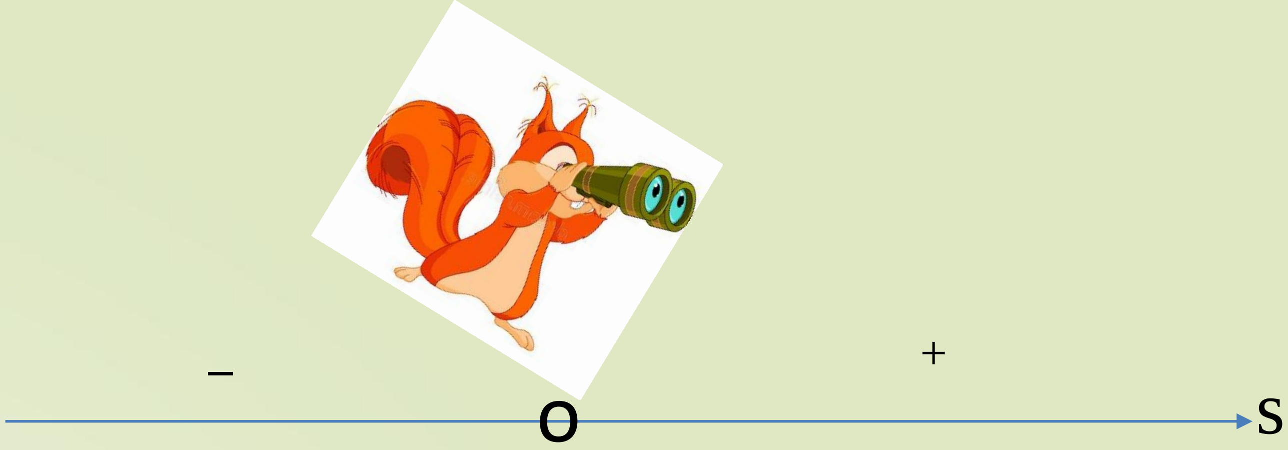
Si " "t" experimenta un incremento " Δt" , la variable "s" también experimentará su correspondiente incremento " Δs".

APLICACIONES FÍSICAS DE LA DERIVADA. RAZONES DE VARIACIÓN DE VARIABLES RELACIONADA

http://www.ingenieria.unam.mx/~colomepg/CAPITULO_III_DERIVADA_III.pdf



Movimiento rectilíneo Para generalizar el análisis, suponga que un objeto, o partícula, en el punto P se mueve a lo largo de una recta de coordenadas vertical u horizontal como se muestra en la FIGURA 2.7.11. Además, considere que la partícula se mueve de modo que su posición, o coordenada, sobre la recta está dada por una función $s = s(t)$, donde t representa el tiempo. s está en función del tiempo o depende del tiempo. Por ejemplo: $s(t) = t^3 + -6t^2 + 9t$



En la recta situamos un origen O, donde estará un observador que medirá la posición *x* del móvil en el instante *t*. Las posiciones serán positivas si el móvil está a la derecha del origen y negativas si está a la izquierda del origen.

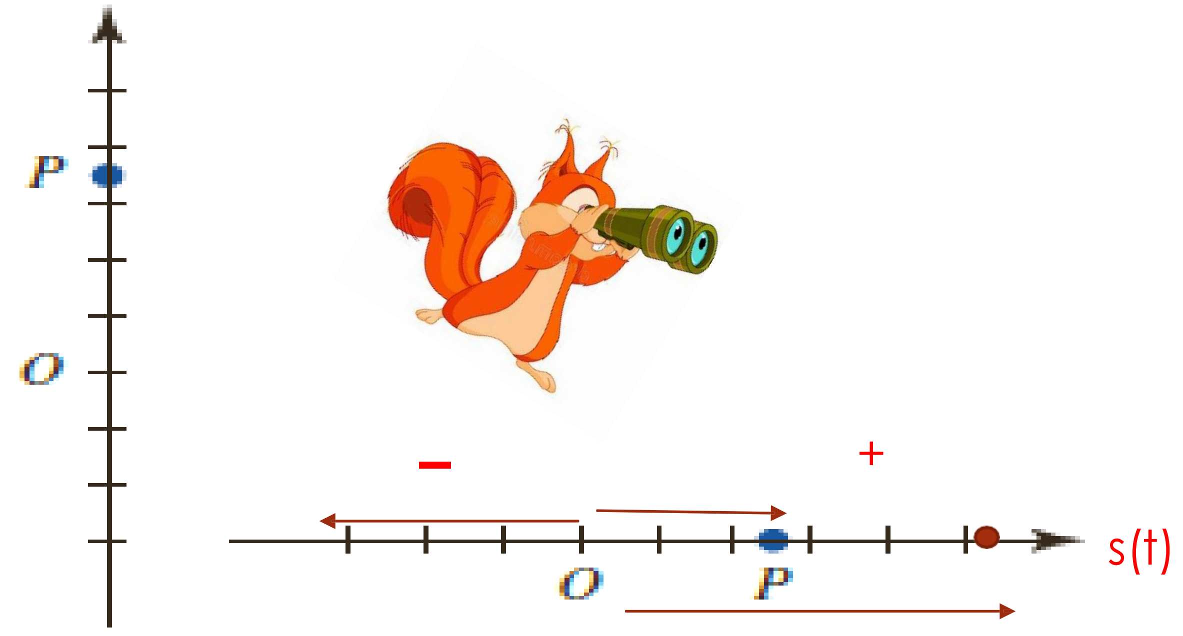


FIGURA 2.7.11 Rectas coordenadas

vectores

Los valores de s son distancias dirigidas medidas a partir de O en unidades como centímetros, metros, pies o millas. Cuando P está a la derecha o arriba de O, se considera $s > 0$, mientras $s < 0$ cuando P está a la izquierda o abajo de O. El movimiento en línea recta se denomina **movimiento rectilíneo**.

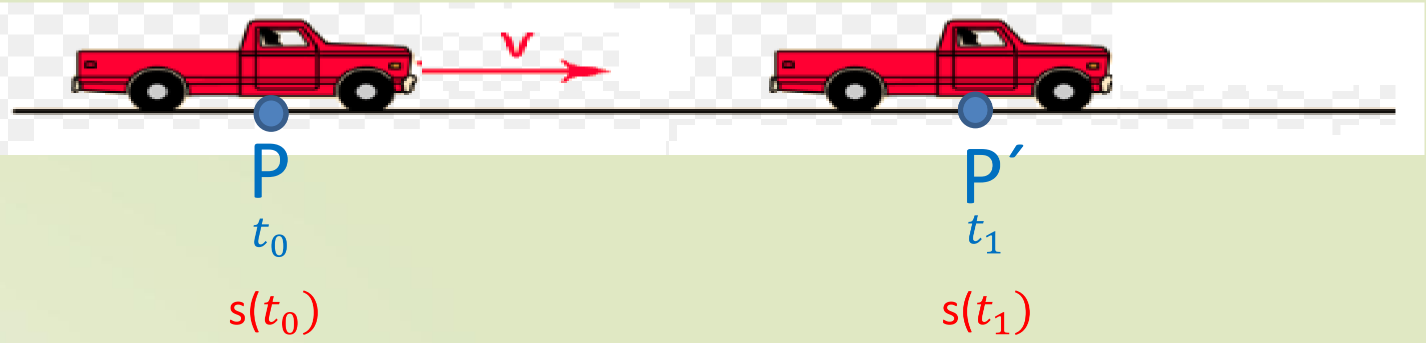


FIGURA 2.7.12 Posición de un automóvil de juguete sobre una recta coordenada en dos instantes

Si un objeto, como un automóvil de juguete, se mueve sobre una recta de coordenadas horizontal, se trata de un punto P en el instante t_0 y un punto P' en el instante t_1, y entonces las coordenadas de los puntos, que se muestran en la FIGURA 2.7.12, son $s(t_0)$ y $s(t_1)$. Por (4), la **velocidad media** del objeto en el intervalo de tiempo $[t_0, t_1]$ es

$$v_{pro} = \frac{\text{cambio en posición}}{\text{cambio en tiempo}} = \quad v_{pro} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Definición 4.1.1 Función velocidad

Si $s(t)$ es una función posición de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función velocidad** $v(t)$ en el instante t es

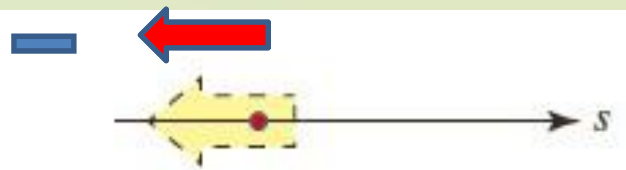
$$v(t) = \frac{ds}{dt}.$$

La **rapidez** del objeto en el instante t es $|v(t)|$.

Definición 4.1.2 Función aceleración

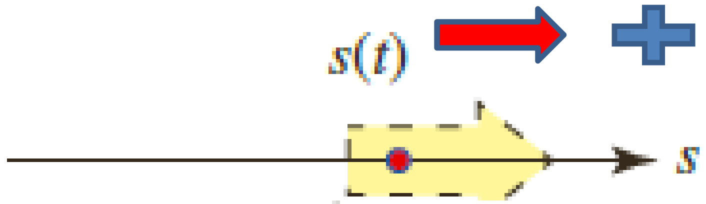
Si $v(t)$ es la función velocidad de un objeto en movimiento rectilíneo, entonces su **función aceleración** $a(t)$ en el instante t es

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$



b) $v(t) < 0$ movimiento hacia la izquierda

FIGURA 4.1.2 Significado del signo de la función velocidad



a) $v(t) > 0$ movimiento hacia la derecha

- **Significado de los signos algebraicos**

Un objeto en movimiento rectilíneo

- **desacelera** cuando su velocidad y aceleración tienen signos algebraicos opuestos, y
- **acelera** cuando su velocidad y aceleración tienen el mismo signo algebraico.

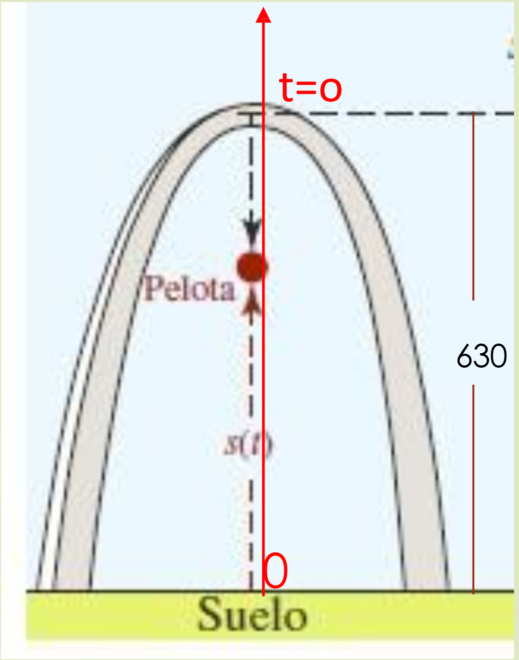
Aunque el objeto se mueva en línea recta, la relación entre la trayectoria y el tiempo no necesariamente es lineal. Por ejemplo, si un objeto se suelta desde una altura de 630 pies en caída libre (solo bajo la fuerza de la gravedad) , la relación entre s(t) y t, si se toma la trayectoria en pies y el tiempo en segundos viene dada por:

$$s(t) = 630 - 16t^2$$

Que corresponde a una más general, con una velocidad inicial v_0 en un tiempo t_0 y un espacio inicial s_0:

:

$$s(t) = s_0 + v_0 t_0 - 16t^2$$



EJEMPLO 8 Velocidad media

La altura s por arriba del suelo a que se suelta una pelota desde la parte superior del Arco de San Luis Missouri está dada por $s(t) = -16t^2 + 630$, donde s se mide en pies y t en segundos. Vea la FIGURA 2.7.13. Encuentre la velocidad media de la pelota que cae entre el instante en que se suelta la pelota y el instante en que golpea el suelo.

Si tomo mi sistema de referencia el suelo, o sea suelo = 0, y si supongo que la pelota arranca de 630 pies, el espacio inicial es 630 pies, el cómo subió allá no importa. Y desde allí se va a soltar la pelota. Y tomo ese momento como tiempo 0. O sea, que a una altura de 630 pies se va a soltar la pelota y el tiempo es por tanto 0. Mi sistema de trayectoria está referenciado al suelo, pero no el tiempo.

$$t_0=0 \longrightarrow s_0=630$$

Cuando la pelota toca el suelo en un tiempo t, el espacio se ha reducido a 0, es s=0.

$$t \longrightarrow s_{final}=0$$

$$0 = 630 - 16t^2$$

$$16t^2 = 630 \qquad t^2 = \frac{630}{16} = \frac{315}{8} \qquad t = 6.27\ s$$

$$v_{pro} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_f - s_0}{t_f - t_0} = \frac{0-630}{6.27-0} = -100{,}4\ \frac{pies}{s}$$

La velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto al tiempo:

$$s(t)=s_0+-16t^2$$

$$\frac{d\ s(t)}{d\mathrm{t}}= v= -32t$$

$$v= 32t=32*6.27\ s= 200.6\ s$$

EJEMPLO 1 Posición de una partícula en movimiento

Una partícula se mueve sobre una recta horizontal según la función posición $s(t) = -t^2 + 4t + 3$, donde s se mide en centímetros y t en segundos. ¿Cuál es la posición de la partícula a 0, 2 y 6 segundos?

Solución Al sustituir en la función posición obtenemos

$$s(0) = 3, \quad s(2) = 7, \quad s(6) = -9.$$

Como se muestra en la FIGURA 4.1.1, $s(6) = -9 < 0$ significa que la posición de la partícula está a la izquierda del punto de referencia $s = 0$.

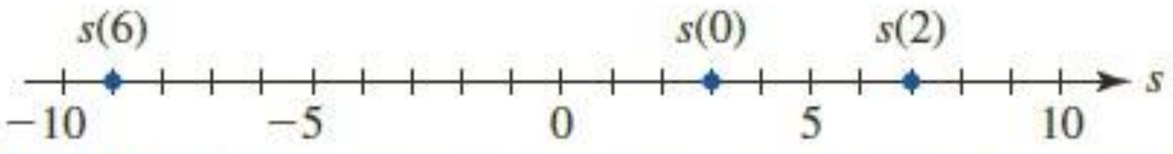


FIGURA 4.1.1 Posición de una partícula en varios instantes en el ejemplo 1

EJEMPLO 2 Otro repaso al ejemplo 1

En el ejemplo 1 las funciones velocidad y aceleración de la partícula son, respectivamente,

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -2t + 4 \qquad \text{y} \qquad a(t) = \frac{dv}{dt} = -2.$$

En los instantes 0, 2 y 6 s, las velocidades son $v(0) = 4$ cm/s, $v(2) = 0$ cm/s y $v(6) = -8$ cm/s, respectivamente.

Cálculo *aplicado: ¡todo!*

http://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=calc&lang=es&ed=7

applied calculus: *everything!*

http://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=calc&lang=en&ed=7

http://www.zweigmedia.com/appholder.html?lang=es&chap=12&sec=5&n=0&tut=1

http://www.sitesforteaching.com/

https://discoveringegypt.com/egyptian-video-documentaries/mystery-of-the-rosetta-stone/

English: https://stellaelm.net/flashcards-interrogatives/

Funciones escaladas y desplazadas http://www.zweigmedia.com/MundoReal/calctopic1/scaledgraph.html

http://www.zweigmedia.com/index.php?lang=es

http://www.zweigmedia.com/tuts/index.php?lang=es