Antiderivadas e Integrales

- Se pide encontrar la función f(x), cuya derivada es:

$$f'(x) = 3x^2$$

Inicialmente se podría considerar f(x)= x^3:

ya que $\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}[x^3] = 3x^2$

La función **f** es una ***primitiva*** o ***antiderivada*** de **f** en un intervalo **I**

Pero resulta que existen varias funciones que cumplen

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}[x^3] = 3x^2$$

$$\mathbf{f_1(x)} = \boldsymbol{x^3}$$

$$\mathbf{f_2(x)} = \boldsymbol{x^3}\text{- }\mathbf{5}$$

$$\mathbf{f_3(x)} = \boldsymbol{x^3} + \mathbf{97}$$

Si f(x) es una antiderivada de f ´ en un intervalo I, **la antiderivada más general de f** en I es:

$$f\,(x) + C$$

donde **C** es una constante arbitraria.

Para cualquier valor de la constante **C**, $f(x) = x^3 + C$ es ***primitiva*** de f y C es llamada ***constante de integración***.

Las antiderivadas de una misma función difieren en una constante.

- Definición:

Una función f se llama antiderivada de una función **f´** en un intervalo I, si la derivada de f es f´.

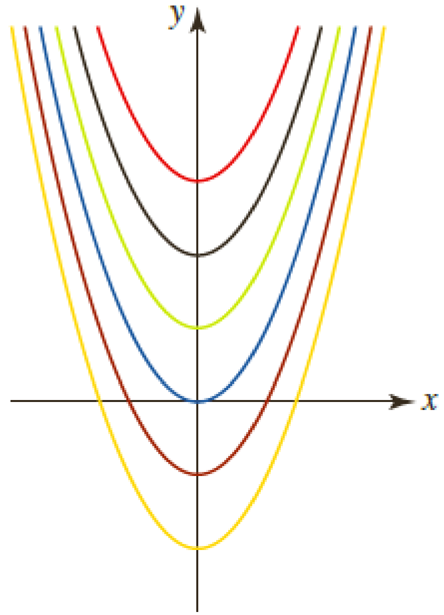


FIGURA 5.1.1 Algunos miembros de la familia de antiderivadas de $f(x) = 2x$

EJEMPLO 2 Antiderivadas más generales

a) Una antiderivada de $f'(x) = 2x + 5$ es $f(x) = x^2 + 5x$ puesto que $f'(x) = 2x + 5$. La antiderivada más general de $f'(x) = 2x + 5$ es $f(x) = x^2 + 5x + C$.

b) Una antiderivada de $f'(x) = \sec^2 x$ es $f(x) = \tan x$ puesto que $f'(x) = \sec^2 x$. La antiderivada más general de $f'(x) = \sec^2 x$ es $f(x) = \tan x + C$. ■

Una ecuación como $\frac{dy}{dx} = f(x)$ se llama ecuación diferencial

Al resolver una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

conviene más expresarla en la forma:

$$\boldsymbol{dy = f\,(x)\,dx}$$

El proceso u operación de hallar todas las soluciones de la ecuación:

$$dy = f(x)dx$$

se llama **Integración Indefinida** o **antiderivación**

y se denota por el signo integral $\int$

INTEGRACIÓN INDEFINIDA (2)

Variable de Integración

Constante de Integración

$$\int dy = y = \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Integrando

INTEGRACIÓN INDEFINIDA (3)

La expresión:

$$\int \mathbf{f(x)dx}$$

se lee: **« la integral indefinida de *f* con respecto a *x* »**

Notación de la integral indefinida Por conveniencia, se introducirá la notación para una antiderivada de una función. Si $F'(x) = f(x)$, la antiderivada más general de f se representa por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Integral = antiderivada

La diferenciación y la integración son fundamentalmente operaciones inversas. Si $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, entonces F es la antiderivada de f; es decir, $F'(x) = f(x)$ y así

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

Además,

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = F'(x) = f(x) \qquad (2)$$

En palabras, (1) y (2) son, respectivamente:

La integral (antiderivada) de una derivada da la ***función original*** + una constante.

La derivada del resultado de una integral da la **función original**

A partir de lo anterior se concluye que siempre que se obtiene la derivada de una función, al mismo tiempo se obtiene una fórmula de integración. Por ejemplo, debido a (1), si

$$\frac{d}{dx}\boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1}} = x^n \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1}\,dx = \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\frac{d}{dx}\boxed{\ln|x|} = \frac{1}{x} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\ln|x|\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\frac{d}{dx}\boxed{\operatorname{sen} x} = \cos x \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x\,dx = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C,$$

$$\frac{d}{dx}\boxed{\tan^{-1} x} = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{entonces} \quad \int \frac{d}{dx}\tan^{-1} x\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$$

Funciones originales

Si se integra la derivada, se obtiene la función original más una constante.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$$

$$\int dx = x + C$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

1. Del múltiplo constante:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

2. De la suma o diferencia:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

CUIDADO:

$$\boxed{\int f(x)g(x)dx \neq \int f(x)dx \int g(x)dx}$$

TABLA 5.1.1

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	10. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	12. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}\|x\| + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	13. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	14. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	15. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	16. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$		

∫ NOTAS DESDE EL AULA

A menudo, a los estudiantes se les dificulta más calcular antiderivadas que derivadas. Dos palabras de advertencia. Primero, debe tenerse mucho cuidado con el procedimiento algebraico, especialmente con las leyes de los exponentes. La segunda advertencia ya se ha planteado, aunque vale la pena repetirla: tenga en cuenta que *los resultados de la integración indefinida siempre pueden comprobarse*. En un cuestionario o en un examen vale la pena que dedique unos minutos de su valioso tiempo para comprobar su respuesta al tomar la derivada. A veces esto puede hacerse mentalmente. Por ejemplo,

integración

$$\int \boxed{x^2}\,dx = \boxed{\frac{x^3}{3} + C}$$

compruebe por diferenciación

Si Ud. deriva el resultado de una integral debe dar la **función que esta integrando:**

$$\frac{d\left(\frac{x^3}{3}+c\right)}{dx} = x^2$$

EJEMPLO 3 Una antiderivada simple pero importante

La fórmula de integración en la entrada 1 en la tabla 5.1.1 se incluye para recalcar:

$$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C \quad \text{ya que} \quad \frac{d}{dx}(x + C) = 1 + 0 = 1.$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la fórmula de integración 2 de la tabla 5.1.1 con $n = 0$. ■

A menudo es necesario volver a escribir el integrando $f(x)$ antes de realizar la integración.

Encontrar: $\int 3a^7x^6\,dx$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$$

Solución.-

$$\int 3a^7 x^6 dx = 3a^7 \int x^6 dx = 3a^7 \frac{x^7}{7} + c$$

EJEMPLO 5 Uso del teorema 5.1.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx$.

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

EJEMPLO 5 Uso del teorema 5.1.2

Evalúe $\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx$.

Solución Por los incisos *i*) y *ii*) del teorema 5.1.2, esta integral indefinida puede escribirse como tres integrales:

$$\int \left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx = 4\int x\, dx - 2\int \frac{1}{x}\, dx + 5\int \operatorname{sen} x\, dx.$$

Debido a las fórmulas de integración 2, 3 y 5 en la tabla 5.1.1, entonces tenemos

$$\int\left(4x - \frac{2}{x} + 5 \operatorname{sen} x\right) dx = 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 2 \cdot \ln|x| + 5 \cdot (-\cos x) + C$$

$$= 2x^2 - 2 \ln|x| - 5 \cos x + C. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x^3 - 5}{x}\,dx$.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

EJEMPLO 6 División término por término

Evalúe $\int \frac{6x^3 - 5}{x}\, dx$.

Solución Por la división término por término, el teorema 5.1.2 y las fórmulas de integración 2 y 3 de la tabla 5.1.1 tenemos:

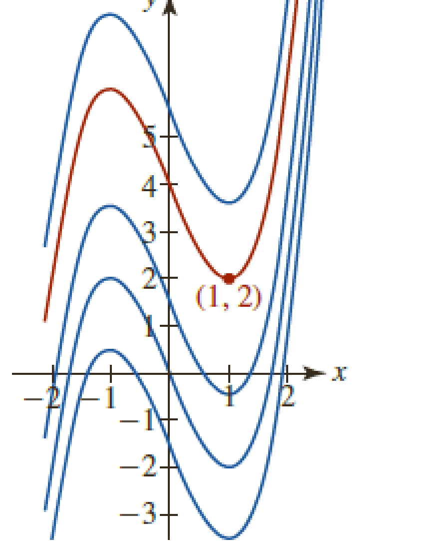
$$\int \frac{6x^3 - 5}{x}\, dx = \int \left(\frac{6x^3}{x} - \frac{5}{x} \right) dx$$

$$= \int \left(6x^2 - \frac{5}{x} \right) dx = 6 \cdot \frac{x^3}{3} - 5 \cdot \ln|x| + C = 2x^3 - 5 \ln|x| + C. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 8 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ cuya gráfica pase por el punto (1, 2) y también satisfaga la ecuación diferencial $dy/dx = 3x^2 - 3$.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$



Solución Por (3) y (4) se concluye que si

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \qquad \text{entonces} \qquad y = \int (3x^2 - 3)\,dx.$$

Es decir,

$$y = \int (3x^2 - 3)\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x + C$$

o bien, $y = x^3 - 3x + C$. Así, cuando $x = 1$, $y = 2$, de modo que $2 = 1 - 3 + C$ o $C = 4$. Por tanto, $y = x^3 - 3x + 4$. Entonces, de la familia de antiderivadas de $3x^2 - 3$ que se muestra en la FIGURA 5.1.2, se ve que sólo hay una cuya gráfica (mostrada en rojo) que pasa por (1, 2). ■

$$\int dx = x + C$$

EJEMPLO 9 Resolución de una ecuación diferencial

Encuentre una función $y = f(x)$ tal que $\frac{d^2y}{dx^2} = 1.$

Solución La ecuación diferencial dada se integra dos veces consecutivas.

$$\int 1 \cdot dx = x + C_1.$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int (x + C_1)\, dx = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2.$$

Encontrar: $\int x(x+a)(x+b)dx$

Encontrar: $\int (a+bx^3)^2 dx$

Encontrar: $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$