Razones de cambio

“Todo debe hacerse lo más simple posible, pero no más simple."- Albert Einstein

MIS VALORES

Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Razones de cambio relacionadas.

Si tenemos dos variables que *varían con respecto a una misma variable* (por ejemplo el tiempo) y deseamos obtener la razón de cambio de una de ellas con respecto a la otra, decimos que lo que necesitamos son razones de cambio relacionadas.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

A su vez, si dos cantidades están relacionadas entre sí, cuando una de ellas cambia con el tiempo, la otra cambiará también. Por lo tanto sus razones de cambio (con respecto al tiempo) están relacionadas entre sí.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

Por ejemplo:

Si el radio de una esfera varía con respecto al tiempo, entonces el volumen de la esfera también varía con respecto al tiempo.
Sería deseable conocer la razón de cambio del volumen con respecto al radio.

Si la velocidad de una partícula cambia respecto al tiempo, también cambia su energía cinética respecto al tiempo. Es importante saber cómo cambia la energía cinética respecto a la velocidad.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

Dos móviles que viajan a cierta velocidad (espacio respecto al tiempo) en diferentes direcciones, se alejan uno del otro. Sería deseable saber la razón de cambio de la distancia entre uno y otro.

En un fenómeno sísmico, a partir del epicentro se producen ondas circulares concéntricas que van creciendo en su radio respecto al tiempo. Sería deseable poder calcular la razón de cambio del área de afectación respecto al radio.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

En fín, si $y = y(u)$ y $x = x(u)$

Y existe una relación entre x e y, es deseable obtener la razón de cambio de y respecto de x o viceversa.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

- La derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en (a, f(a)).
- $f'(a)$ es también la razón de cambio de la función f en a.

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

Nota: la siguiente información es tomada textualmente de la excelente página zweigmedia, Stefan Waner

Significado de una razón de cambio

Si Q es una cantidad que cambia en el tiempo, entonces la derivada dQ/dt mide la rapidez con que Q está aumentando o disminuye instante t :

Razón de cambio de $Q = \boxed{\frac{dQ}{dt}}$ **Es la rapidez con que Q esta aumentando (+) o disminuyendo en un instante t**

Ejemplo

El peso de una masa amorfa es disminuyendo a una razón de dos kg/sec en el instante en que pesa diez kg

Símbolos: (W representa peso) $W =$ 10 $\frac{dW}{dt} =$ -2 $\frac{kg}{sec}$ Cada segundo se pierden 2 kg.

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

El volumen de combustible para cohetes en el motor principal de una nave espacial se da por

$V = 10 + t^{-1} - 4t^{-2}$ m^3 t segundos después de su lanzamiento.

¿Cuál es la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo?

Nueve segundos después del lanzamiento, el volumen de combustible es 10.0617 m^3

y ○ aumentando ◉ disminuyendo ○ no cambiando a una razón de 0.0014 m^3/sec.

Mensaje de ayuda

$$V = 10 + t^{-1} - 4t^{-2}$$

$$\frac{dV}{dt} = -t^{-2} + 8t^{-3}$$

Cuando $t = 9$, el volumen de combustible es $V = 10 + (9)^{-1} - 4(9)^{-2} \approx 10.0617.$ m^3

Su razón de cambio es

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=9} = -(9)^{-2} + 8(9)^{-3} \approx -0.0014\ \text{m}^3/\text{seg},$$

por lo que el volumen está disminuyendo a una razón de $0.0014\ \text{m}^3$/seg.

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

25

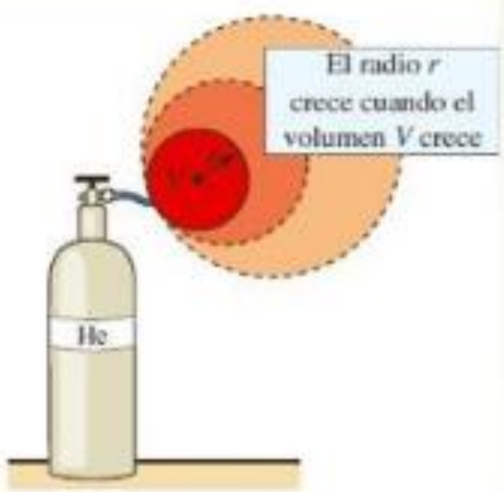


FIGURA 4.2.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo

Una razón de, por ejemplo, $dV/dt = 5$ pies^3/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo.

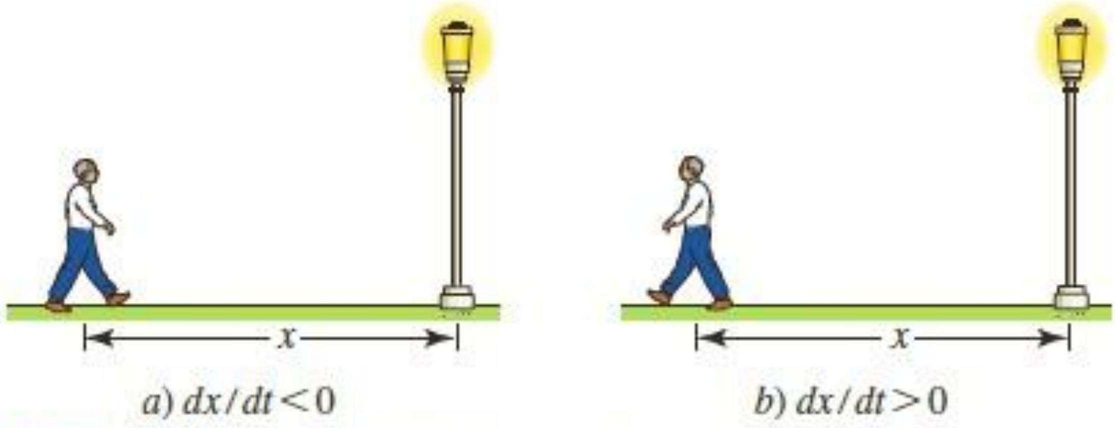


FIGURA 4.2.2 x decreciente en a); x creciente en b)

En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s.

Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s.

Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

Problemas de Razones de Cambio Relacionadas

En un **problema de razones relacionadas** (o **problema de tasas relacionadas**) se nos da la razón de cambio de una o más cantidades, y tenemos que encontrar:

- La razón de cambio de otras u otras variables con respecto al tiempo.
- La razón de cambio de una o más variables con respecto a otra variable diferente al tiempo.
- La razón de cambio de una o más variables con respecto a otras variables *relacionadas*.

Nota: información tomada textualmente de la excelente página zweigmedia, Stefan Waner

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

Por ejemplo, si se sabe la razón la razón a la que el radio de un círculo está creciendo, y queremos saber qué tan rápido el área está creciendo.

Para resolver este tipo de problemas, utilizamos un enfoque paso a paso. Miremos el siguiente ejemplo:

El radio de una tortilla está creciendo a una razón de 10 cm/seg. ¿Qué tan rápido está creciendo su área en el instante en que su radio es 5 cm?

10 cm/seg es la rapidez con que r esta aumentando (+) en un instante t y se expresa como : $\frac{dr}{dt} = \frac{10cm}{s}$.

Y significa exactamente, que cada segundo el radio aumenta 10 cm.

1. Identificar las cantidades cambiantes.

Las cantidades cambiantes son

- (•) el radio r y el área A.
- ( ) el radio r y el volumen V.
- ( ) el área A y el volumen V.

2. Reformular el problema en términos de razones de cambio.

El dado probema es "El radio de una tortilla está creciendo a una razón de 10 cm/seg. ¿Qué tan rápido está creciendo su área instante cuando su radio es 5 cm?"

✔Reformular el problema dado utilizando la frase "la razón de cambio " donde apropiado:

- A La razón de cambio de A es -10 cm/seg. Determina la razón de cambio de r cuando r es igual a 5.
- ✔ B La razón de cambio de r es 10 cm/seg. Se debe determinar la razón de cambio de A con respecto a t: $\frac{dA}{dt}$?
- C La razón de cambio de r es -10 cm/seg. Determina la razón de cambio de A cuando r es igual a 5.
- D La razón de cambio de r es -10 cm/seg. Determina A cuando r es igual a 5.
- E La razón de cambio de A es 10 cm/seg. Determina la razón de cambio de r cuando r es igual a 5.
- F La razón de cambio de r es 10 cm/seg. Determina A cuando r es igual a 5.

3. Reescribir el problema utilizando la notación matemática.

◉ $\boxed{dr/dt}$			○ dr/dt		◉ r	
○ dA/dt	= 10 cm/s	. Determina	◉ dA/dt	cuando	○ A	= 5 .
○ dV/dt			○ dV/dt		○ V	

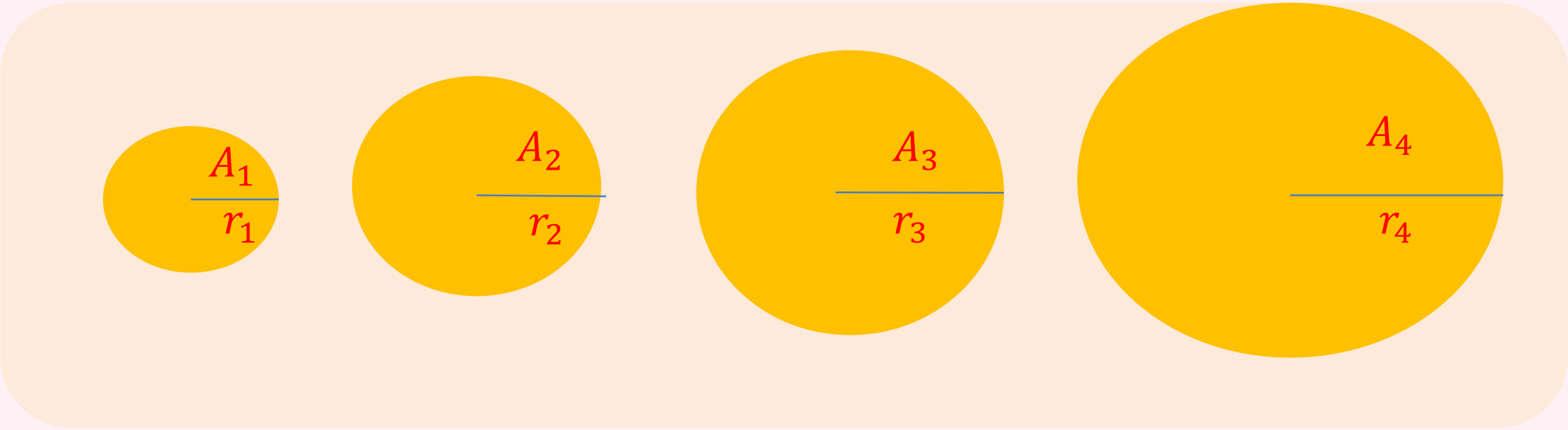
$$\frac{dr}{dt} = 10cm/s$$

B. La relación

1. Dibuja un diagrama apropriado que muestra las candidates cambiantes.

Dibujo de las cantidades cambiantes (Haz clic en el dibujo correcto.)

Nota Cantidades cambiantes se representan por letras; cantidades no cambiantes se representa por números.



http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

2. *Escribe una ecuación que relaciona las cantidades cambiantes.* A y r

Ya has identificado las dos cantidades cambiantes en (A). Una ecuación que las relaciona es

$$A = pir^2$$ Área del círculo

3. *Toma la derivada respecto al tiempo de la ecuación que relaciona las cantidades cambiantes..*

Esto da la **ecuación derivada,** que relaciona *las razones de cambio* de las cantidades.

$$\frac{dA}{dt} = 2pir\frac{dr}{dt}$$

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

C.

1. En la ecuación derivada, sustituir los valores dados de las cantidades y sus derivadas.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(5)(10) \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{10cm}{s} \qquad r = 5cm$$

2. Despejar a la derivada que se busque. Esto te da la solución del problema..

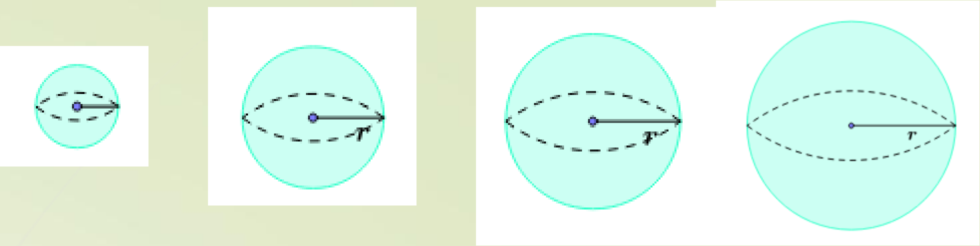
La razón de cambio del área que se busca es, por lo tanto,

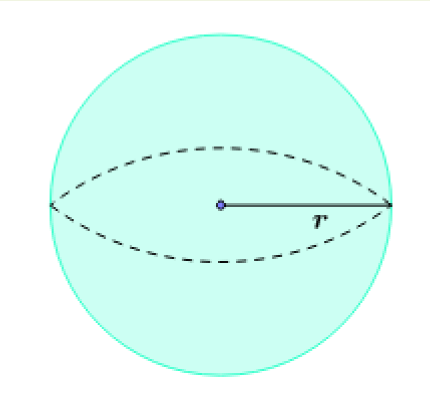
$\frac{dA}{dt} =$ 314.16 $\mathrm{cm}^2/\mathrm{seg}$ Cada segundo el área aumenta 314,16 cm^2

En la forma decimal, exacto hasta 2 posiciones decimales

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

Otro ejercicio





$r = f(t) = 5t$

El radio aumenta 5 cm cada segundo $\frac{dr}{dt} = \frac{5cm}{s}$

El crecimiento del radio de una esfera se da con una velocidad uniforme = $\frac{5cm}{s}$ (sigue la fórmula $r = 5t, t\ en\ segundos, v = \frac{r}{t},\ r = vt$). Calcular la velocidad de crecimiento del área de la superficie y del volumen cuando el radio r = 50cm, sabiendo que el área de una esfera es

$$A = 4\pi r^2$$

Y el volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

Empleando la ecuación $r = 5t$

cuando r = 50 cm el tiempo es $t = \frac{50}{5} = 10$ s

se debe calcular la velocidad de crecimiento del A y del V en t= 10s.

Para poder calcular la velocidad de cambio de A y de V debemos disponer ambas ecuaciones en función del tiempo, estos se logra reemplazando la ecuación $r = 5t$ en A y en V y derivando con respecto al tiempo.

$$A = 4\pi(5t)^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi(5t)^3$$

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

El área de la superficie y el volumen de la esfera son

$$A(r) = 4\pi r^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} A(t) = 4\pi(5t)^2 = 100\pi t^2$$

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \overset{(1)}{\Rightarrow} V(t) = \frac{4}{3}\pi(5t)^3 = \frac{500}{3}\pi t^3$$

Así, sus velocidades de cambio respectivass, son

$$A'(t) = 200\pi t \overset{(2)}{\Rightarrow} A'(10) = 200\pi \frac{cm^2}{seg} \;{*}10{=}6280\ \frac{cm^2}{seg}$$

$$V'(t) = 500\pi t^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} V'(10) = 50000\pi \frac{cm^3}{seg} = 157000\ \frac{cm^3}{seg}$$

http://newton.matem.unam.mx/calculo1/Daplica/da_aplicacion04_d.html

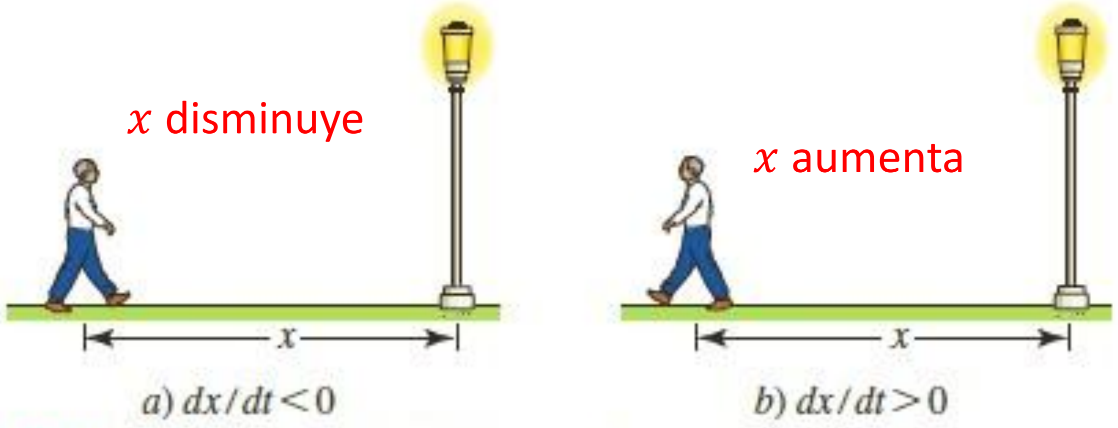


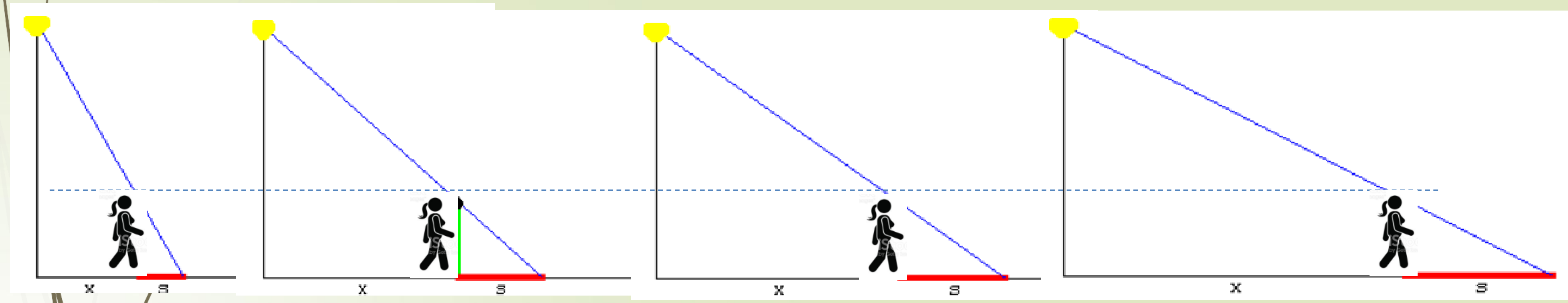
FIGURA 4.2.2 x decreciente en a); x creciente en b)

En forma semejante, si una persona camina *hacia* el poste mostrado en la FIGURA 4.2.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que $dx/dt = -3$ pies/s.

Por otra parte, si la persona se *aleja* del poste, entonces $dx/dt = 3$ pies/s.

Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia x de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

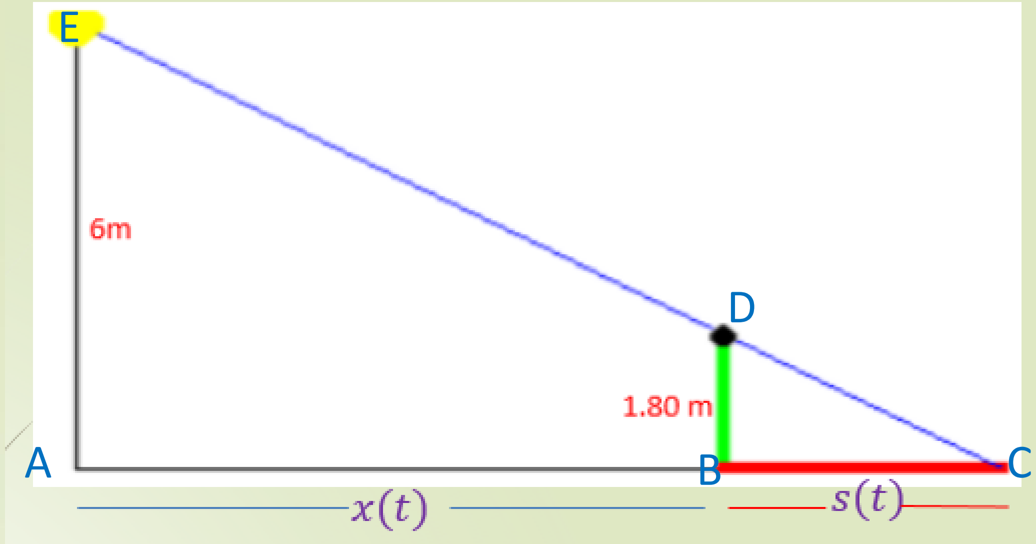
Una persona de 1.80 metros de altura se aleja de un poste de alumbrado de 6 metros de altura con una velocidad de $\frac{dx}{dt} = 1\,\frac{m}{s}$. ¿Con qué rapidez crece la sombra de la persona?



http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/razrel/raz_ejem.html

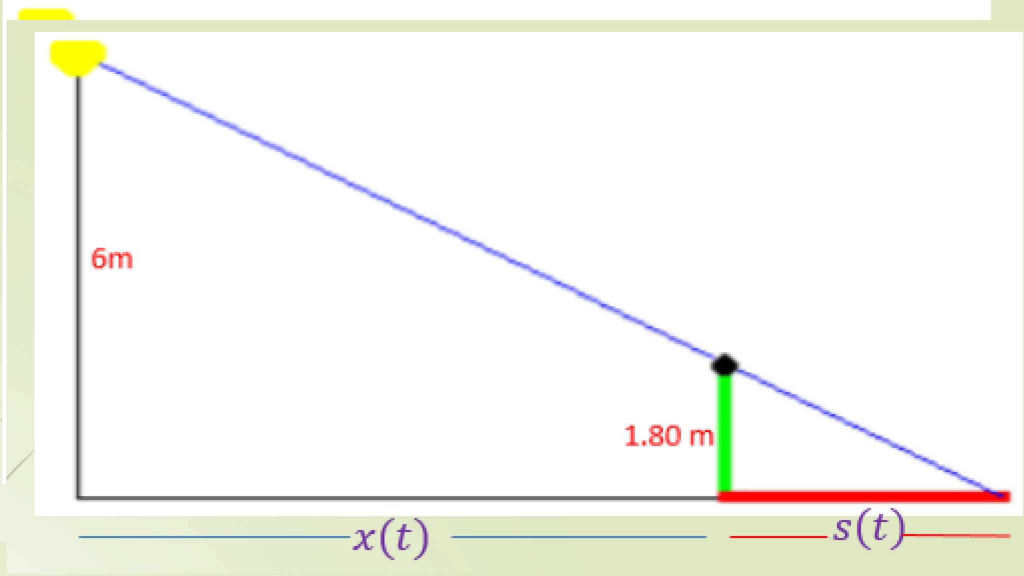
La distancia x al poste cambia (aumenta +) con el tiempo.
La longitud de la sombra cambia (aumenta +) con el tiempo.
La longitud de la sombra depende de la distancia de la persona al poste.
Es función de la distancia al poste,

Se trata de hallar la variación de la sombra s con respecto al tiempo $\frac{ds}{dt}$
cuando $\frac{dx}{dt} = 1\ \frac{m}{s}$



Dos triángulos son semejantes si tienen sus respectivos lados paralelos.
Si dos triángulos son semejantes sus respectivos lados son proporcionales.
El triángulo ACE es semejante al triángulo BCD.
Por tanto:

$$\frac{6}{1.8} = \frac{x(t) + s(t)}{s(t)}$$



$$6^* \, s(t) = 1.8\langle x(t) + s(t)\rangle$$

$$0 = 1.8^* x(t) + 1.8 * s(t) - 6^* \, s(t)$$
$$0 = 1.8^* x(t) + 1.8 * s(t) - 6^* \, s(t)$$
$$0 = 1.8^* x(t) - 4.2 * s(t)$$
$$1.8^* x(t) = 4.2 * s(t)$$
$$s(t) = \frac{1.8^* x(t)}{4.2} = 0.42 x(t)$$

http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/RAZREL/raz_ejem.html

Despejando a *s(t)* obtenemos:

$$s(t) = (0.428571)\, x(t)$$

Derivando con respecto al tiempo obtenemos *s'(t)*:

$$s'(t) = (0.428571)\, x'(t)$$

$$\frac{dx}{dt} = 1\,\frac{m}{s}$$

Sustituyendo el valor de *x'(t)*=1. obtenemos:

$$s'(t) = 0.428571$$

La razón de cambio de *s* con respecto a *t* es:

$$s'(t) = 0.428571 \text{ cuando } x'(t) = 1$$

http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/RAZREL/raz_ejem.html

Los problemas de razones de cambio relacionadas se resuelven siguiendo los siguientes pasos:

1. Hacer una ilustración de la situación planteada.

2. Identificar con símbolos las cantidades que varían en el tiempo.

3. Identificar las razones que se conocen y la razón que se busca.

4. Escribir una ecuación que relacione las variables.

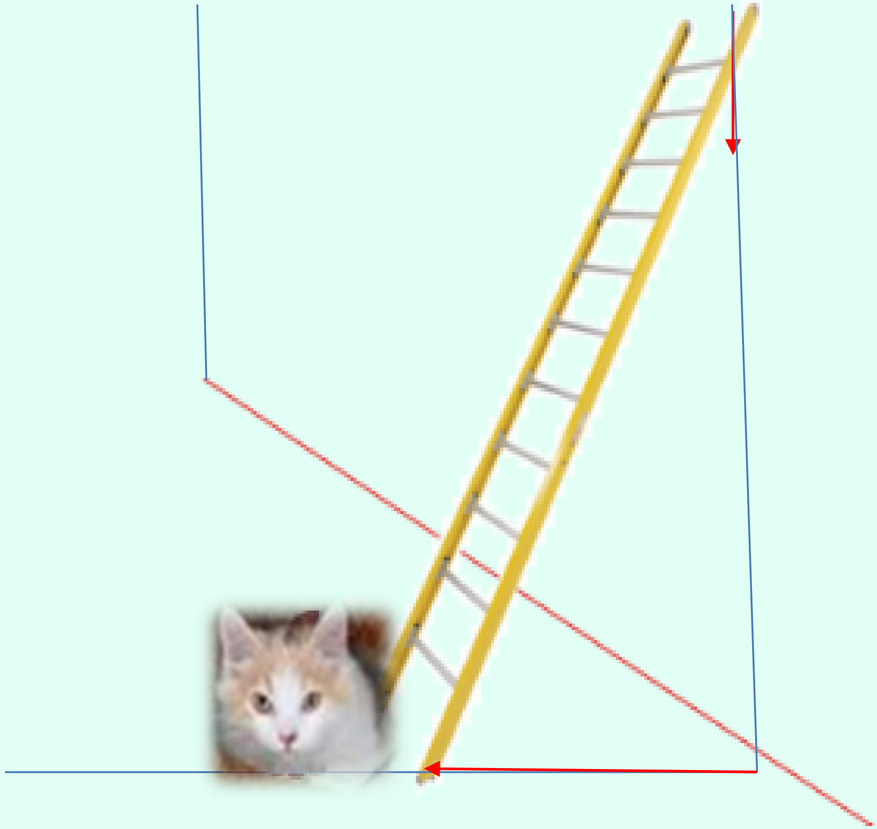
5. Derivar implícitamente con respecto al tiempo la ecuación obtenida en el paso 4.

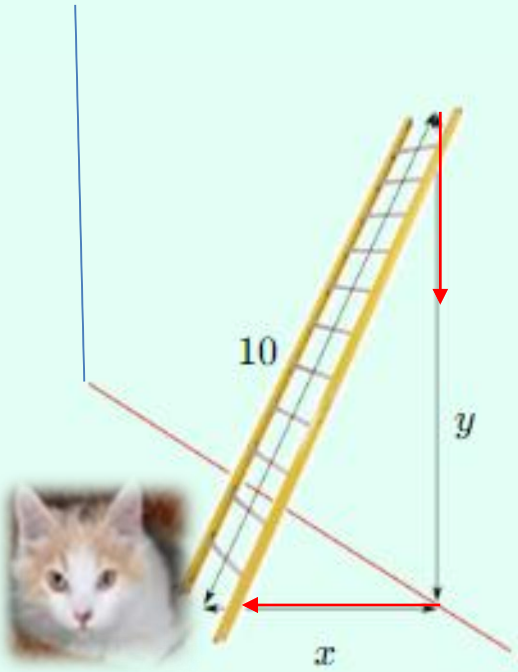
http://www.uacj.mx/CGTI/CDTE/JPM/Documents/IIT/sterraza/mate2016/RAZREL/raz_ejem.html

Una escalera de 10 pies colocada descuidadamente se desliza por una pared de tal manera que la parte superior de la escalera está cayendo a una razó de 1 pies/seg. Tu gato siamés Papanutski está sentado en línea directa con la base que se acerca, y le golpeará cuando la parte superior de la escalera e de 8 pies por encima del suelo. ¿Qué tan rápido está la base de la escalera alejándose de la pared cuando se golpea Papnutski?

$$\frac{dy}{dt} = -1\ \frac{pies}{s}$$

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{y=8} = ?$$





http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

A. El problema

1. Identificar las cantidades cambiantes.

Las cantidades cambiantes son

- (•) la altura y de la parte superior de la escalera y la distancia x de su base de la pared.
- ( ) el largo s de la escalera y la distancia x de su base de la pared.
- ( ) la altura y de la parte superior de la escalera y su largo s.

2. Reformular el problema en términos de razones de cambio.

El dado problema es: Una escalera de 10 pies colocada descuidadamente se desliza por una pared de tal manera que la parte superior de la escalera está cayendo a una razón de 1 pies/seg. Tu gato siamés Papanutski está sentado en línea directa con la base que se acerca, y le golpeará cuando la parte superior de la escalera es de 8 pies por encima del suelo. ¿Qué tan rápido está la base de la escalera alejándose de la pared cuando se golpea Papnutski?

✔Reformular el problema dado utilizando la frase "la razón de cambio " donde apropiado:

- A La razón de cambio de x es 1 pies/seg. Determina la razón de cambio de y cuando y es igual a 8.
- ✔ B La razón de cambio de y es -1 pies/seg. Determina la razón de cambio de x cuando y es igual a 8.
- C La razón de cambio de y es 1 pies/seg. Determina la razón de cambio de x cuando y es igual a 8.
- D La razón de cambio de y es 1 pies/seg. Determina x cuando y es igual a 8.
- E La razón de cambio de x es -1 pies/seg. Determina la razón de cambio de y cuando y es igual a 8.
- F La razón de cambio de y es -1 pies/seg. Determina x cuando y es igual a 8.

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

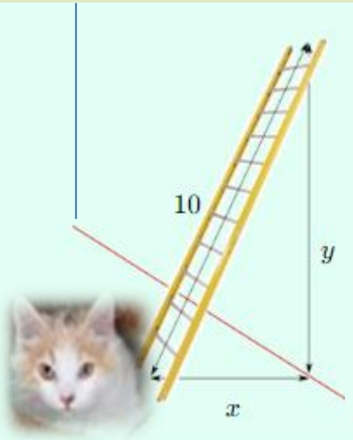
3. *Reescribir el problema utilizando la notación matemática.*

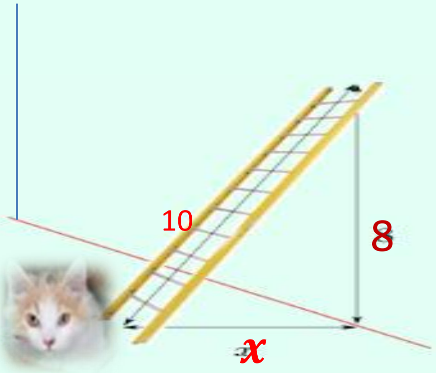
○ dx/dt			◉ dx/dt		○ x	
◉ dy/dt	$= -1 \frac{pies}{s}$	. Determina	○ dy/dt	cuando	◉ y	$= 8$.
○ ds/dt			○ ds/dt		○ s	

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es

Una ecuación que relaciona las cantidades cambiantes es

$$x^2 + y^2 = 100$$ (Pitágoras)





3. Escribe la ecuación derivada..

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

C. La solución

$$x = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$$

1. En la ecuación derivada, sustituir los valores dados de las cantidades y sus derivadas.

$$x\frac{dx}{dt} - 8 = 0$$

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = -1\,\frac{pies}{s} \qquad y = 8}$$

2. Despejar a la derivada que se busque..

Para despejar a dx/dt, primero necesitamos saber el valor de x. Para esto, utiliza la ecuación que relaciona las cantidades cambiantes.

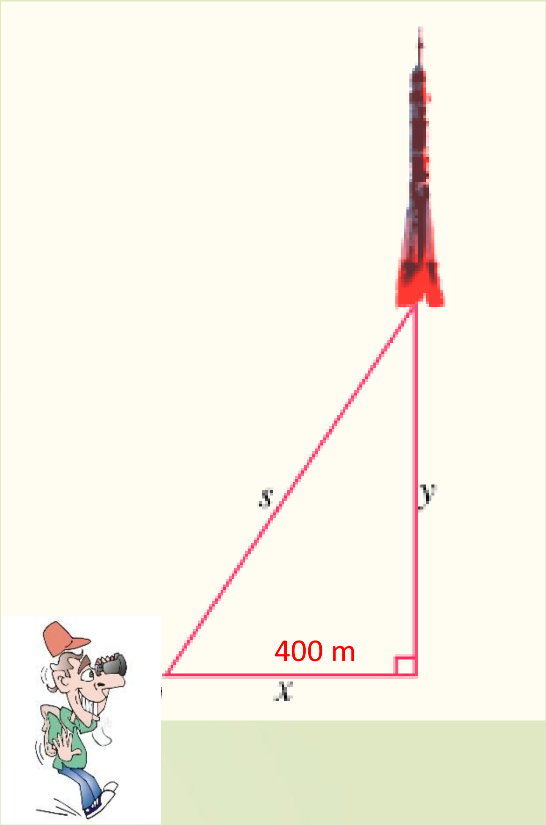
$x =$ 6 pies

La razón de cambio que se busca es, por lo tanto,

$\frac{dx}{dt} =$ 4/3 pies/seg

Por lo tanto, la base de la escalera está alejándose de la pared a una razón de 1.3 pies/seg

http://www.zweigmedia.com/tuts/tutRelatedRates.php?lang=es



Estás situado a 400 m de la plataforma de lanzamiento del Centro de Lanzamiento de Satélites de Jiuquan (China) y estás mirando el lanzamiento del más reciente vehículo lunar tripulado chino. En un determinado momento, el vehículo está a 300 m por encima de la plataforma y se aleja de ti con una velocidad de 18 m/s. ¿Qué tan rápido está subiendo el vehículo en ese instante? Sea x, tu distancia al plataforma de lanzamiento, y la altitud del vehículo encima de la plataforma, s tu distancia al vehículo, como se muestra en la figura.

http://www.zweigmedia.com/appholder.html?lang=es&chap=12&sec=5&n=0&tut=1

Cantidades que cambian:
- ○ x, y
- ○ x, s
- ◉ y, s

Enunciación del problema:

- ○ dx/dt
- ○ dy/dt = 18 .
- ◉ ds/dt = ?

Determina
- ○ dx/dt
- ◉ dy/dt
- ○ ds/dt

cuando
- ○ x
- ◉ y
- ○ s

= 300

Relación: $s^2 = 400^2 + y^2$

Ecuación derivada:

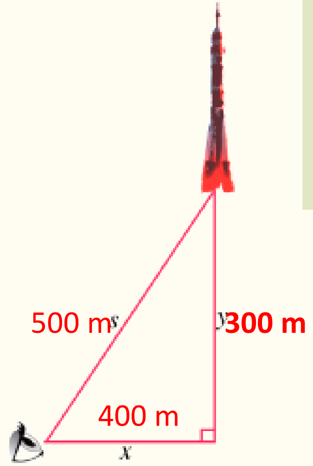
- ○ $s\dfrac{ds}{dt} = x\dfrac{dx}{dt}$
- ◉ $s\dfrac{ds}{dt} = y\dfrac{dy}{dt}$
- ○ $x\dfrac{dx}{dt} = y\dfrac{dy}{dt}$

http://www.zweigmedia.com/appholder.html?lang=es&chap=12&sec=5&n=0&tut=1

$s^2 = 400^2 + 300^2$ $s = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500$

Valores de todos las variables en el instante dado:

$x =$ 400 $y =$ 300 $s =$ 500



Respuesta (sustituya todos los valores que conoces en la ecuación derivada y despejar a la tasa de cambio desconocida):

El vehiculo está subiendo a una tasa de

- ○ dx/dt
- ◉ dy/dt
- ○ ds/dt

= 30 m/s.

http://www.zweigmedia.com/appholder.html?lang=es&chap=12&sec=5&n=0&tut=1

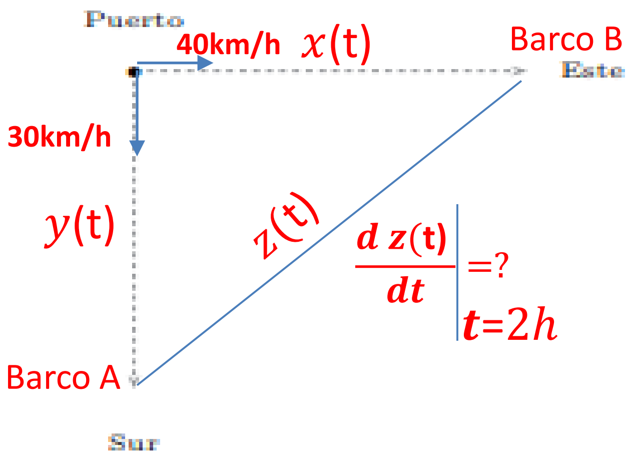
Ejemplo 7.1 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto, uno viaja hacia el Sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el Este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 horas ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/7TRazon.pdf

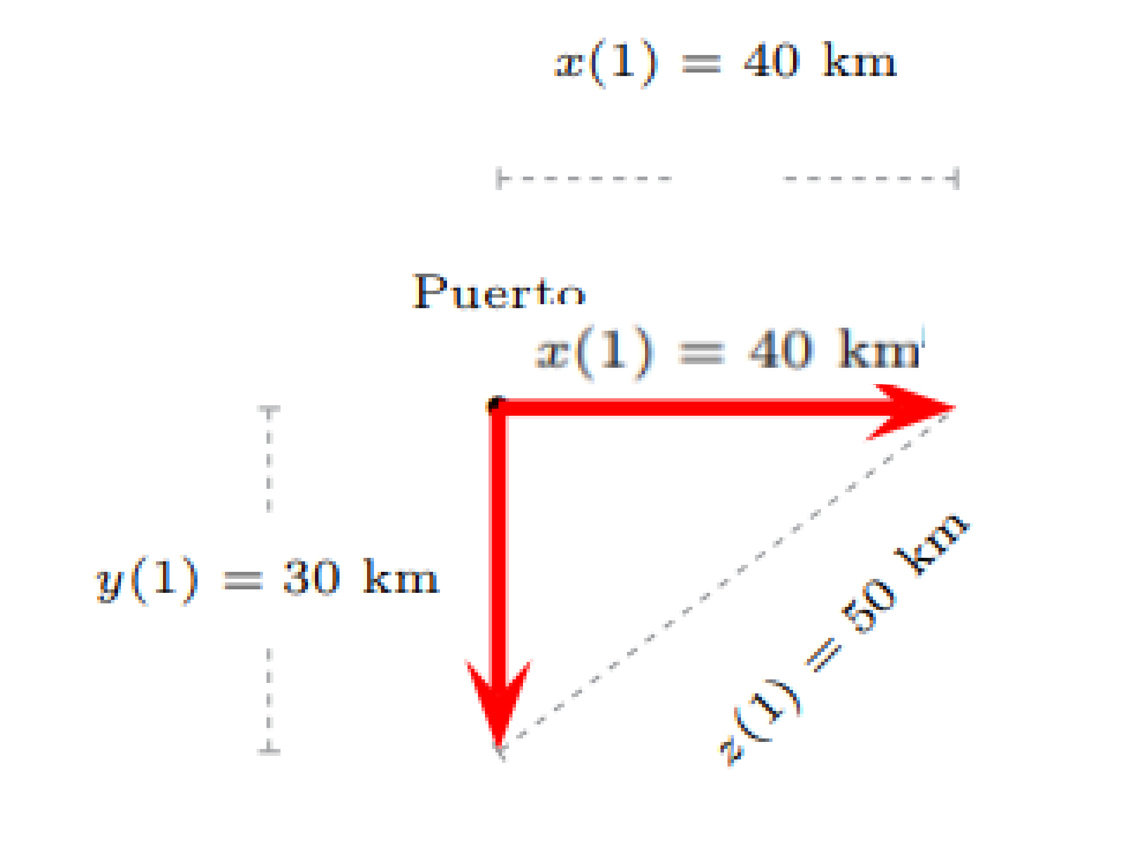
Ejemplo 7.1 *Dos barcos salen simultáneamente de un puerto, uno viaja hacia el Sur a una velocidad de 30 km/h y el otro hacia el Este a una velocidad de 40 km/h. Después de 2 horas ¿cuál es la velocidad de separación de los dos barcos?*

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular la velocidad a la que se están separando los barcos después de 2 horas de haber partido del mismo puerto. Es decir, si consideramos que $z(t)$ es la distancia que separa a los barcos en cierto instante t, entonces lo que se desea es calcular la rapidez con que cambia (razón de cambio de) la distancia $z(t)$ al paso del tiempo. Esto es se pide calcular a la derivada $\frac{dz}{dt}$ cuando el tiempo t transcurrido es de 2 horas.

Consideramos al puerto P como el origen de nuestro sistema de referencia y a los barcos A y B desplazándose con movimientos uniformemente rectilíneos (cada uno a velocidad constante).

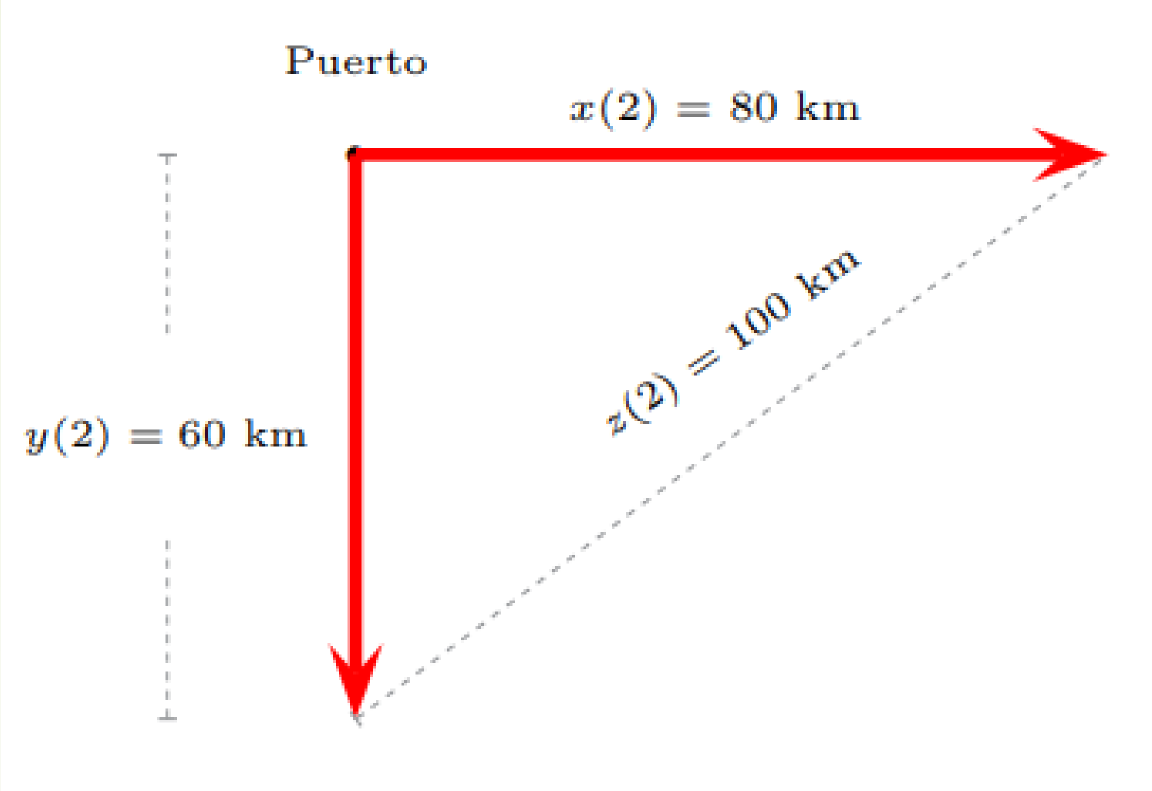


Una hora después de haber iniciado su desplazamiento:

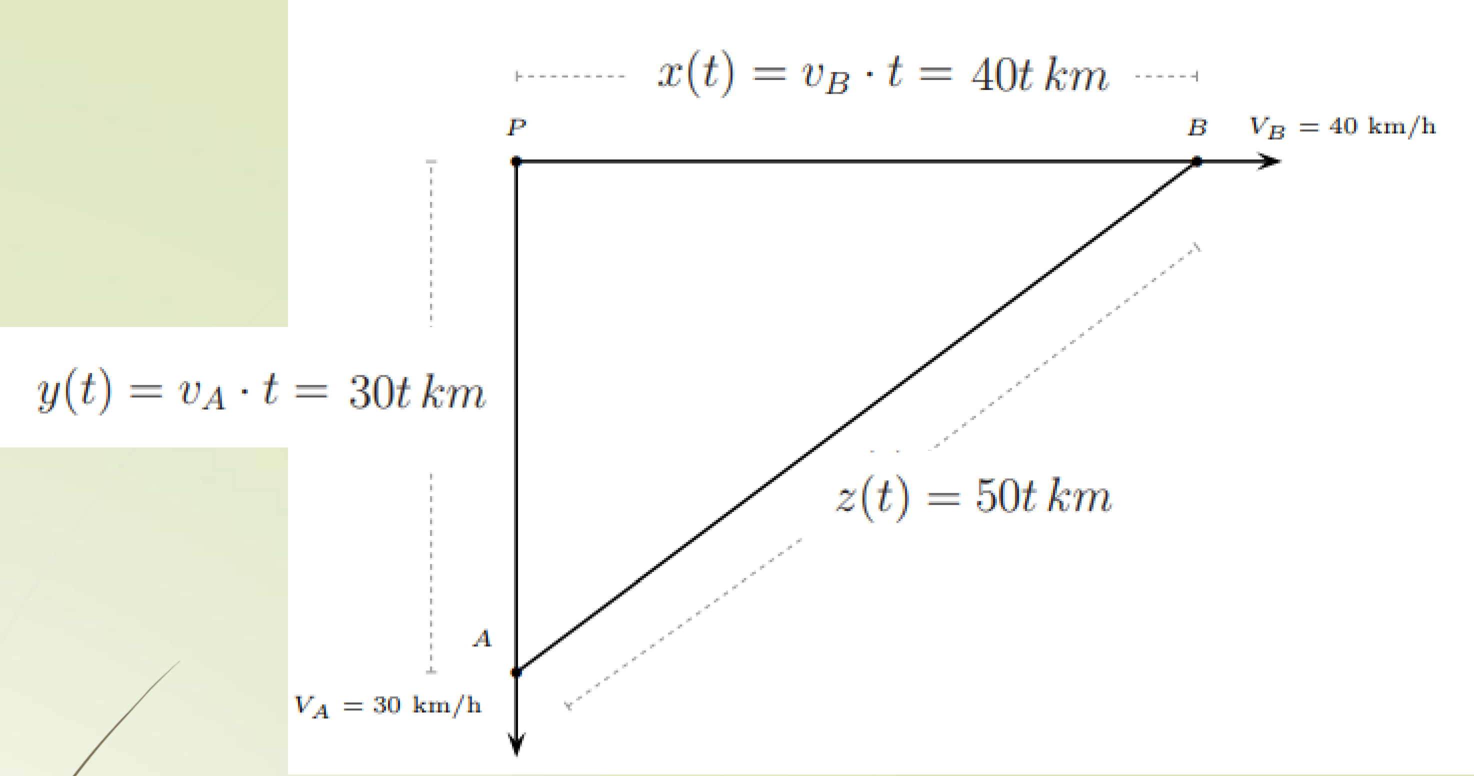


http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/7Razon.pdf

Dos horas después de haber iniciado su desplazamiento



http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/FTRazon.pdf



Si $x(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco B que se desplaza hacia el Este entonces

$$x(t) = v_B \cdot t = (40\,km/h)(t\,h) = 40t\,km$$

y si $y(t)$ es la distancia recorrida en t horas por el barco A que se desplaza hacia el Sur entonces

$$y(t) = v_A \cdot t = (30\,km/h)(t\,h) = 30t\,km$$

Luego, por el teorema de Pitágoras, la distancia z que separa a los dos barcos cumple con

$$z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2 = (40t)^2 + (30t)^2 = 1600t^2 + 900t^2 = 2500t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = \sqrt{2500t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(t) = 50t\,km$$

$$z(t) = 50t\ km$$

Así pues la distancia $z(t)$ es la función lineal $z(t) = 50t$, por lo que su derivada es $\frac{dz}{dt} = 50$, que es una función constante. Esto es, en cualquier instante $t > 0$, los barcos se están separando a una velocidad constante $z'(t) = 50\,km/h$.

En particular, después de 2 horas, $z'(2) = 50\,km/h$.

http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/FTRazon.pdf

Cálculo *aplicado: ¡todo!*

http://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=calc&lang=es&ed=7

applied calculus: *everything!*

http://www.zweigmedia.com/tcpage.php?book=calc&lang=en&ed=7

http://www.zweigmedia.com/appholder.html?lang=es&chap=12&sec=5&n=0&tut=1

http://www.sitesforteaching.com/

https://discoveringegypt.com/egyptian-video-documentaries/mystery-of-the-rosetta-stone/

English: https://stellaelm.net/flashcards-interrogatives/

mat.uson.mx:

http://www.mat.uson.mx/~jldiaz/Documents/Derivadas/7TRazon.pdf

Funciones escaladas y desplazadas http://www.zweigmedia.com/MundoReal/calctopic1/scaledgraph.html

http://www.zweigmedia.com/index.php?lang=es

http://www.zweigmedia.com/tuts/index.php?lang=es