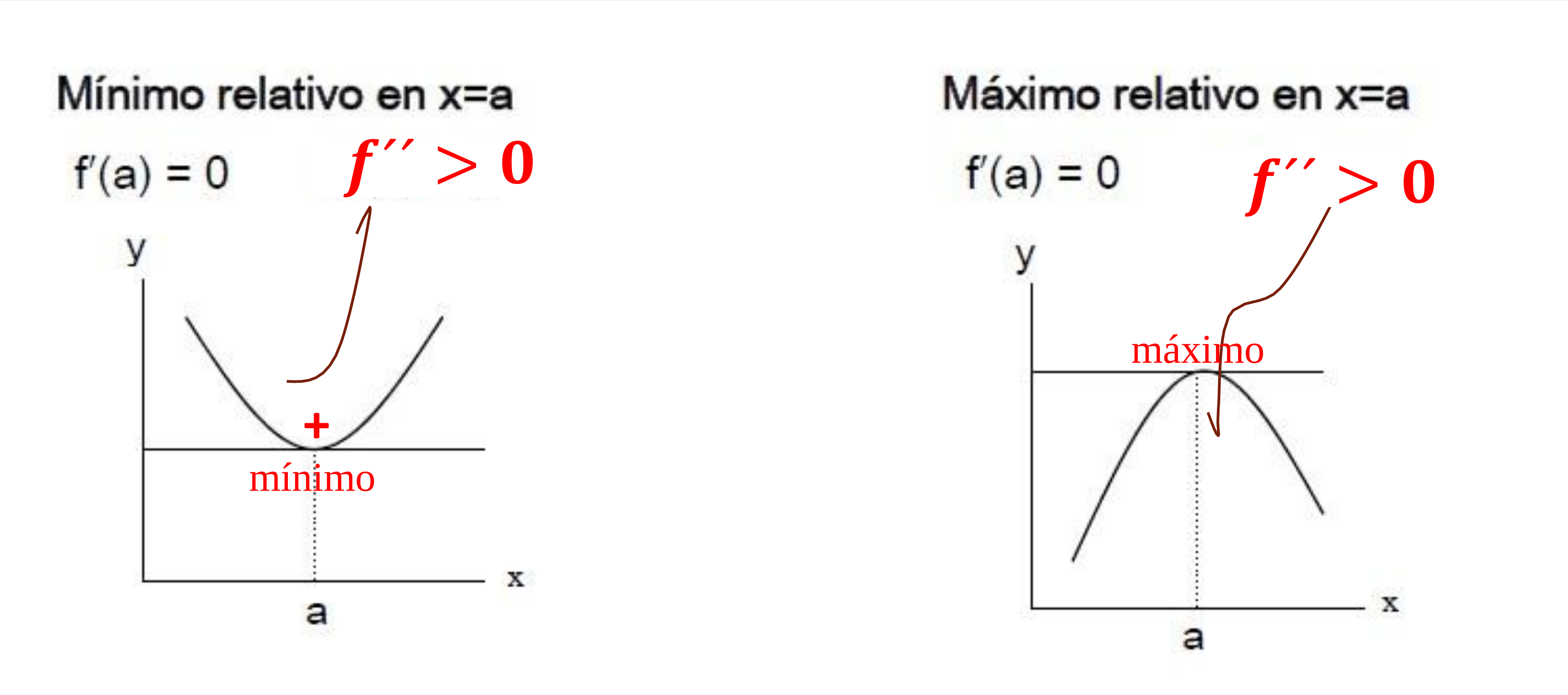
Optimización de funciones

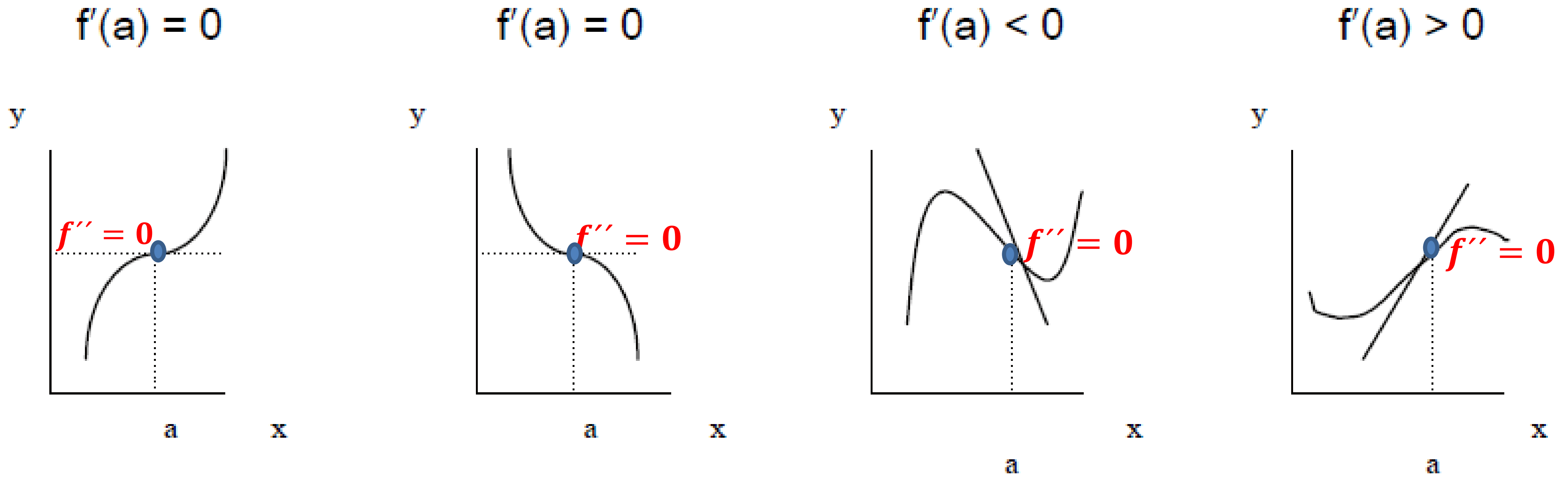
Usos de la primera y segunda derivada para máximos y mínimos. Método simplificado.

La segunda derivada sirve para determinar la concavidad de una función. También, conjuntamente con la primera derivada para comprobar si hay un máximo o un mínimo y los puntos de inflexión.. El método es:

1. Hallar la primera derivada.
2. Igualar a cero la primera derivada.
3. Resolver sus raíces. Estos son los valores críticos y candidatos para máximos o mínimos.
4. Reemplazar las raíces en la segunda derivada.
5. Si el valor hallado es mayor positivo (concavidad arriba) sabremos que hay un mínimo.
6. Si es o menor que cero (concavidad hacia abajo) habrá un máximo.


Mínimo relativo en x=a
f′(a) = 0
$f'' > 0$
y
+
mínimo
x
a
Máximo relativo en x=a
f′(a) = 0
$f'' > 0$
y
máximo
x
a

$f''(a)=0$



4.1.4 Puntos de inflexión

Un punto de inflexión es un punto en el grafico donde la función cruza su línea tangente y cambia de cóncavo a convexo y viceversa. Los puntos de inflexión pueden ocurrir solo donde la segunda derivada iguala a cero o es indefinida. Es decir, $f''(a)=0$.

Pasos para la resolución de problemas

1. Se plantea la función que hay que maximizar o minimizar.

2. Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema, en el caso de que haya más de una variable.

3. Se despeja una variable de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede una sola variable.

4. Se deriva la función y se iguala a cero, para hallar los extremos locales.

5. Se realiza la 2ª derivada para comprobar el resultado obtenido.

https://www.vitutor.com/fun/5/b.html

VOLÚMENES DE CUERPOS EN EL ESPACIO

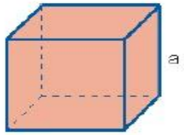
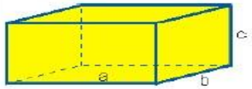
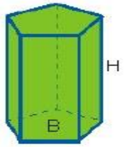
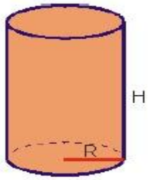
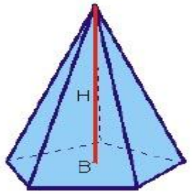
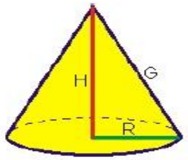
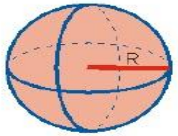
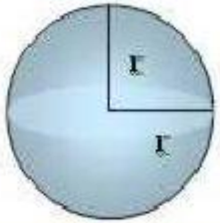
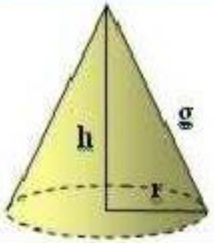
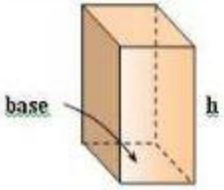
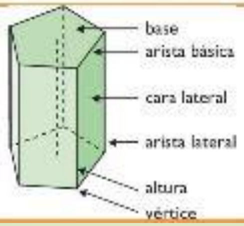
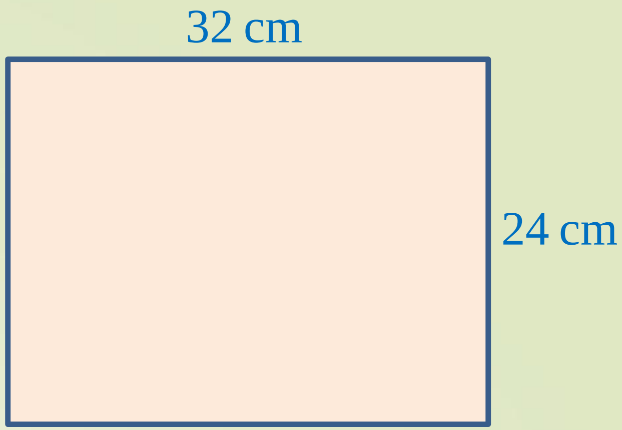
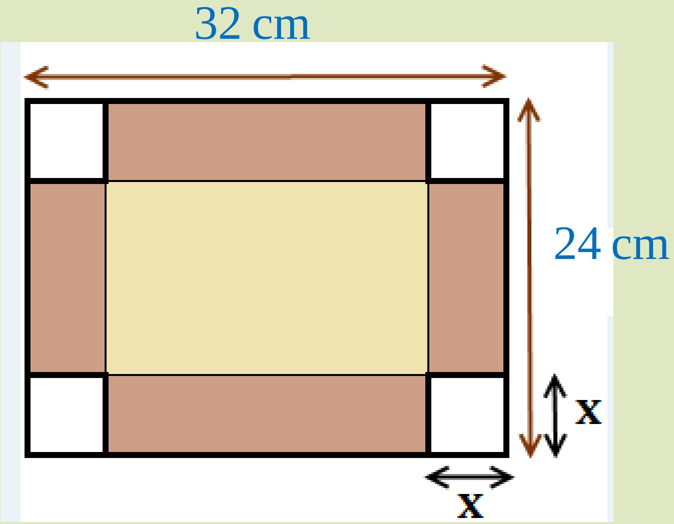
Nombre	Dibujo	Volumen
Cubo		$V = a^3$
Paralelepípedo u ortoedro		$V = a \cdot b \cdot c$
Prismas		$V = A_B \cdot H$
Cilindros		$V = A_B \cdot H$
Pirámides		$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Conos		$V = \frac{1}{3} A_B \cdot H$
Esfera		$V = \frac{4}{3} \pi \cdot R^3$

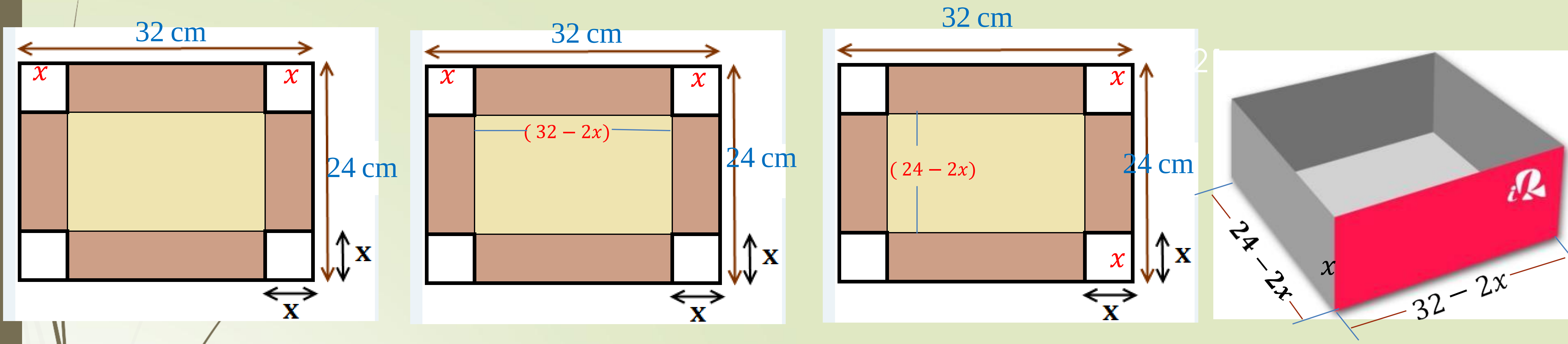
Figura	Esquema	Área	Volumen
Cilindro		$A_{total} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r)$	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera		$A_{total} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$
Cono		$A_{total} = \pi \cdot r \cdot (r + g)$	$V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$
Ortoedro		$A_{total} = 2 \cdot (b \cdot l) + 2 \cdot (l \cdot h) + 2 \cdot (b \cdot h)$	$V = A_{base} \cdot h$
Prisma		$A_{base} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$ $A_{total} = 2\,(A_{base}) + P \cdot h$	$V = A_{base} \cdot h$

Ejercicio # 1





Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser la longitud del lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

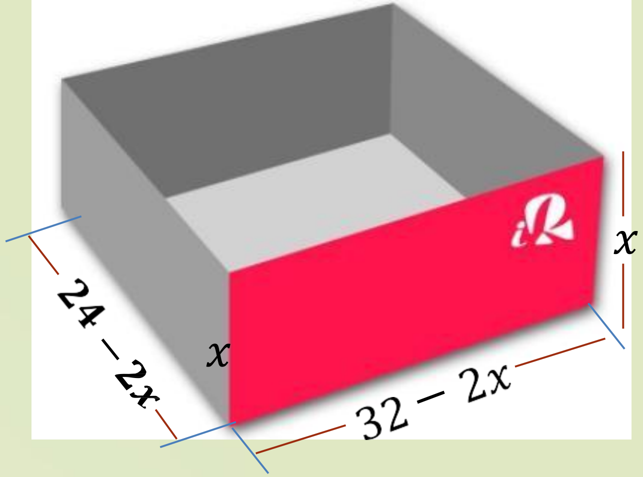


Al largo (32 cm) le resto $2x$, queda $(32-2x)$.

Al ancho (24 cm) le resto $2x$, queda $(24-2x)$.

Estas son las dimensiones del fondo de la caja.

Al doblar la lámina, la altura es x.



Volumen caja= Volumen de un paralelipípedo regular (ortoedro regular):

área de la base* altura

área de la base= área de un rectángulo=$(32-2x)*(24-2x)$

Volumen caja=$(32-2x)*(24-2x)*x$

$=(768-64x-48x+4x^2)x=$

Volumen caja $=4x^3-112x^2+768x$

.

Volumen caja $=4x^3 - 112x^2 + 768x$

$$\frac{dVol}{dx} = V' = 12x^2 - 224x + 768$$

$$12x^2 - 224x + 768 = 0$$

Aplicando fórmula general=

$$x = 4.5$$
$$x = 14.1$$

Puntos críticos

Hallamos la segunda derivada de $12x^2 - 224x + 768 = 0$

$$V'' = 24x - 224$$

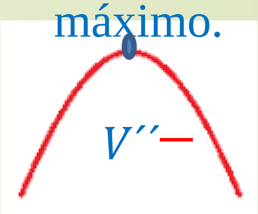
En esta ecuación se reemplazan los valores críticos de 4.5 y 14.1 hallados antes:

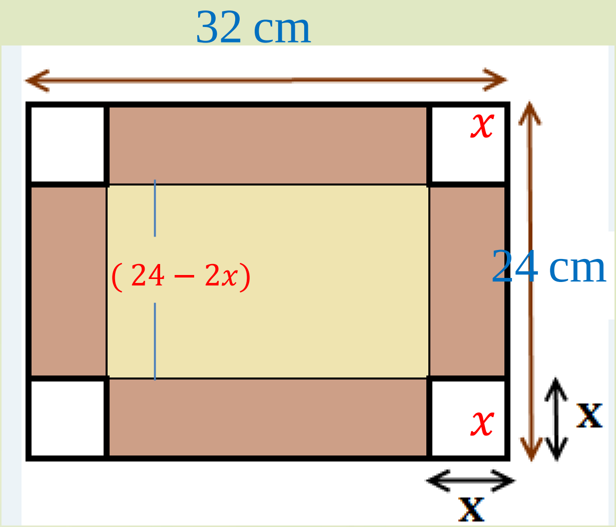
$V'' = 24 * 4.5 - 224 = 348 - 224 = -116$ Es menor que 0

Ahora, hago lo mismo para 14.5

$V'' = 24 * 14.5 - 224 = 348 - 224 = 124$ Es mayor que 0

Como al reemplazar en V'' el valor de 4,5 da negativo se concluye que 4.5 es un máximo.

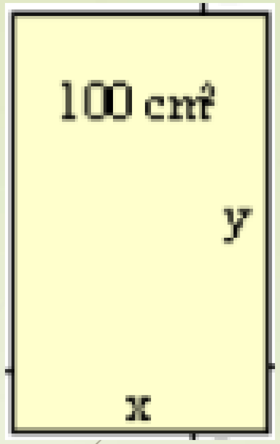




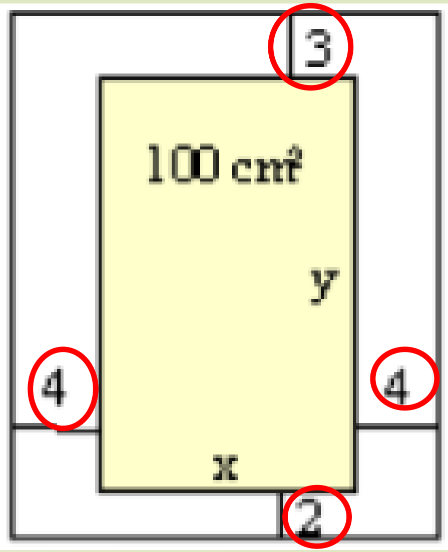
Si x que es la longitud del cuadrito a sacar, fuera de 14,1 cm no daría, pues habría que sacar d cuadraditos y su longitud de 2*14,1=28.2 cm sería mayor que el ancho dado para la lámina d 24 cm. Por tanto, el valor pedido es el de 4.5 cm para que el V sea máximo.

$$Vol_{\text{máximo de la caja}} = 4x^3 - 112x^2 + 768x = 4*4.5^3 - 112*4.5^2 + 768*4.5 = 1552.5\ cm^3$$

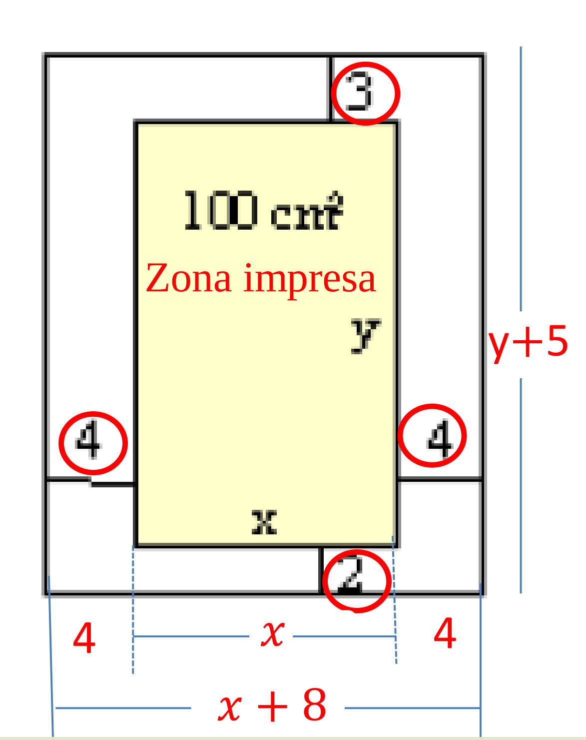
Ejercicio # 2



Zona impresa

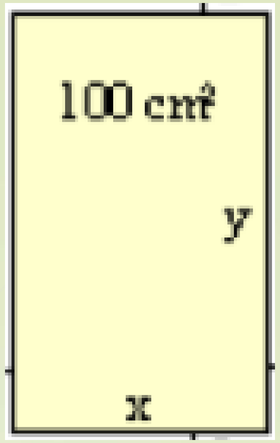


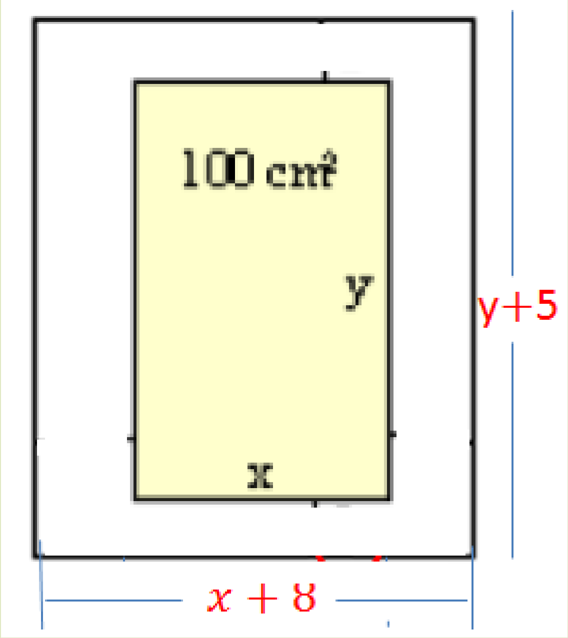
Zona impresa + márgenes



Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar 100 cm^2, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno.

Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible. Se pregunta por el área mínima del papel.





Área de zona impresa= $x * y$= 100 cm^2

Área total $= (x+8)(y+5)$

$$y = \frac{100}{x}$$

$$A(x) = (x+8)\left(\frac{100}{x}+5\right)$$

$$A(x) = 100 + 5x + 800x^{-1} + 40$$

$$A(x) = 5x + 800x^{-1} + 140$$

$$A(x) = 5x + 800x^{-1} + 140$$

$$A'(x) = 5 - 800x^{-2}$$

$$A'(x) = 5 - \frac{800}{x^2} = 5x^2+800= \frac{5x^2-800}{x^2} = 0$$

$5x^2-800=0$ $\quad$ $5x^2=800$ $\quad$ $x^2=160$

$x = \sqrt{160} = 12{,}6$ cm $\quad y = \frac{100}{x} = \frac{100}{12.6} = 7.9\ cm$

$$A'(x) = 5 - 800x^{-2}$$

$$A''(x) = 2 * 800x^{-3} = \frac{1600}{x^3}$$

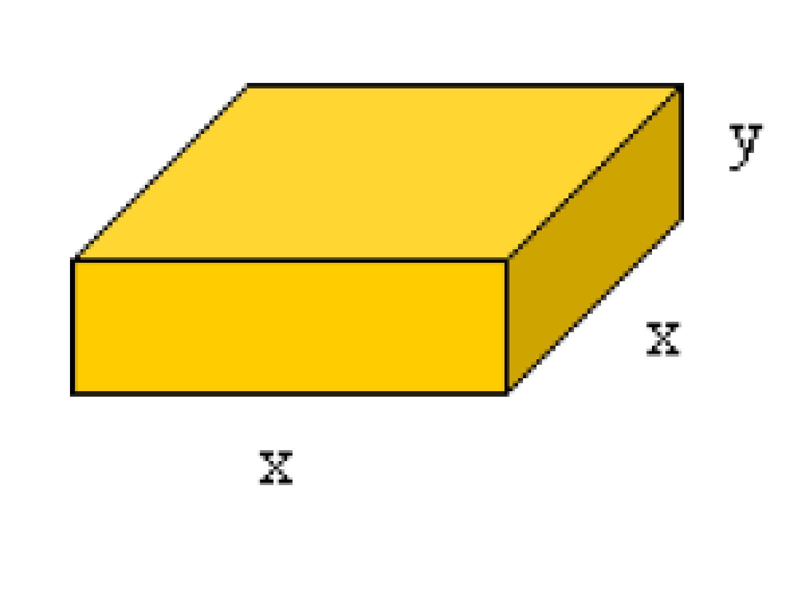
Como para ese valor S´´ es positiva se tiene la solución mínima buscada.

Las dimensiones del cartel deben ser:

ancho: $x + 8 = 8 + 4\sqrt{10}$

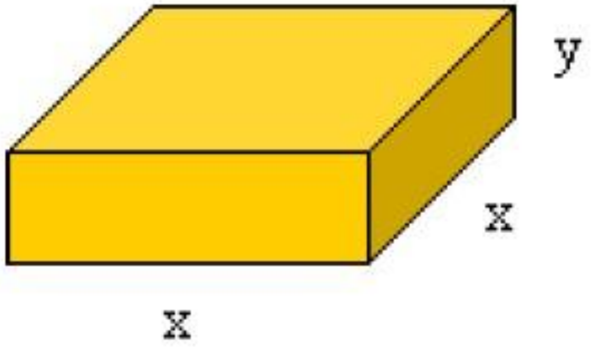
alto: $y + 5 = 5 + 2{,}5\sqrt{10}$

Ejercicio # 3



De todos los prismas rectos de base cuadrada y tales que el perímetro de una cara lateral es de 30 cm, halla las dimensiones del que tiene volumen máximo.

Si x es el lado de la base e y la altura del prisma, el volumen será $V = x^2y$. Esta es la función que se desea hacer máxima.
Se sabe que $2x + 2y = 30 \Rightarrow y = 15 - x$.



Luego

$$V(x) = x^2 y = x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3$$

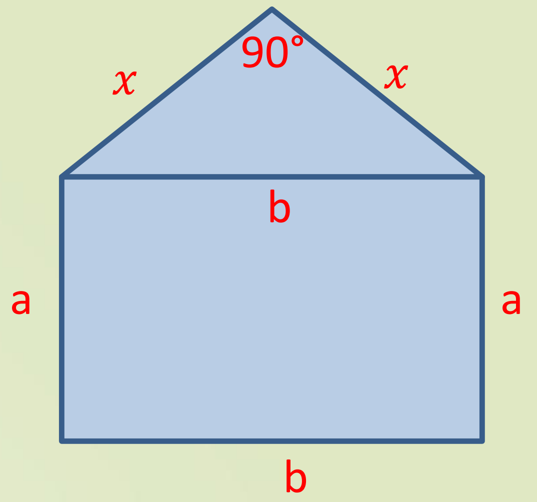
$$V'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x) = 0$$

La derivada se anula para x = 0 y x = 10.

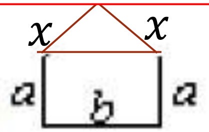
$$V''(x) = 30 - 6x$$

V´´(10)= –30 < 0, para ese valor se tiene el máximo buscado.

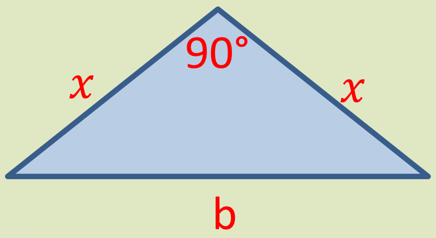
Ejercicio # 4



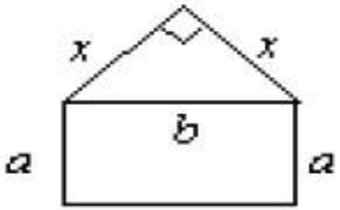
El perímetro de la ventana del dibujo mide 6 metros. Los dos lados superiores forman entre sí un ángulo de 90°.



Calcula la longitud de los lados *a* y *b* para que el área de la ventana sea máxima.



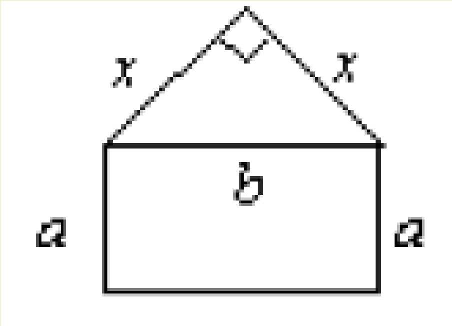
Suponemos que los dos lados superiores son iguales (el enunciado no lo dice, pero así lo sugiere la figura). Si su medida es x se tendrá:



Por Pitágoras:

$$h^2 = x^2 + x^2 = b^2 \Rightarrow x = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$b^2 = 2x^2 \longrightarrow x^2 = \frac{b^2}{2} \rightarrow x = \sqrt{\frac{b^2}{2}}$$



El perímetro es: $2a+b+2x=6$ $\rightarrow$ $2a+b+\frac{2b}{\sqrt{2}}=6 \;\Rightarrow\; a=\frac{6-b(1+\sqrt{2})}{2}$

El área de la ventana es la suma del área de la sección rectangular más la de la sección triangular:

$$A=ab+\frac{x^2}{2}=\frac{6-b(1+\sqrt{2})}{2}\cdot b+\frac{b^2}{4} \;\Rightarrow\; A(b)=\frac{12b-(1+2\sqrt{2})b^2}{4}$$

$$A'(b) = \frac{12 - 2(1+2\sqrt{2})b}{4} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}}$$

$$A''(b) = -\frac{(1+2\sqrt{2})}{2} < 0$$

$\rightarrow$ luego, para el valor de b hallado se tiene el máximo de A.

$$a = \frac{6 - b(1+\sqrt{2})}{2}$$

$$\text{Si } b = \frac{6}{1+2\sqrt{2}} \to a = \frac{6 - \dfrac{6(1+\sqrt{2})}{1+2\sqrt{2}}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$$

Ejercicio # 5

Se tiene un alambre de 1 m de longitud y se desea dividirlo en dos trozos para formar con uno de ellos un círculo y con el otro un cuadrado. Determinar la longitud que se ha de dar a cada uno de los trozos para que la suma de las áreas del círculo y del cuadrado sea mínima.

$$S = \pi r^2 + l^2$$

$$2\pi r + 4l = 1 \qquad l = \frac{1 - 2\pi r}{4}$$

$$S = \pi r^2 + \left(\frac{1 - 2\pi r}{4}\right)^2$$

$$S' = 2\pi r + 2\,\frac{1 - 2\pi r}{4}\left(-\frac{2\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left[r\left(8 + 2\pi\right) - 1\right]$$

$$\frac{\pi}{4}\left[r\left(8 + 2\pi\right) - 1\right] = 0 \qquad r = \frac{1}{8 + 2\pi}$$

$$\text{Trozo del círculo} = 2\pi\,\frac{1}{8 + 2\pi} = 0.439\,\text{m}$$

$$\text{Trozo del cuadrado} = 1 - 0.439 = 0.661\,\text{m}$$

$$S'' = \frac{\pi}{4}\left(8 + 2\pi\right) > 0$$

https://www.matematicasonline.es/pdf/ejercicios/1%C2%BABach%20Cienc/Ejercicios%20de%20optimizacion%20de%20funciones.pdf