INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN

❖MIS VALORES
Entrega
Transparencia
Simplicidad
y Persistencia

❖MI VISIÓN: Tender a ser un ser humano completo mediante la entrega, la transparencia, la simplicidad y la persistencia.

❖MI MISIÓN: Entrega a la Voluntad Suprema.
Servir a las personas.

Enail: hegiraldo2@Gmail.com

Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración	Fórmula de diferenciación	Fórmula de integración
1. $\frac{d}{dx}x = 1$	$\int dx = x + C$	10. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$
2. $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = x^n (n \neq -1)$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	11. $\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$
3. $\frac{d}{dx}\ln\|x\| = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + C$	12. $\frac{d}{dx}\sec^{-1}x = \frac{1}{\|x\|\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}\|x\| + C$
4. $\frac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	13. $\frac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$, $(b > 0, b \neq 1)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln b} + C$
5. $\frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	14. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
6. $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	15. $\frac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$	$\int \cosh x\, dx = \operatorname{senh} x + C$
7. $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	16. $\frac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$	$\int \operatorname{senh} x\, dx = \cosh x + C$
8. $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$		
9. $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$		

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\int \frac{x}{(4x^2 + 3)^6}\, dx$.

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 1 Uso de (8)

Evalúe $\int \frac{x}{(4x^2+3)^6}\,dx.$

Solución La integral vuelve a escribirse como

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx$$

y se hace la identificación

$$u = 4x^2 + 3 \qquad \text{y} \qquad du = 8x\,dx.$$

Luego, para obtener la forma precisa $\int u^{-6}\,du$ es necesario ajustar el integrando al multiplicar y dividir entre 8:

$$\int (4x^2+3)^{-6}x\,dx = \frac{1}{8}\int \overbrace{(4x^2+3)^{-6}}^{u^{-6}}\overbrace{(8x\,dx)}^{du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= \frac{1}{8}\int u^{-6}\,du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{u^{-5}}{-5} + C$$

Reemplazando el valor de u=(4xx^2+ 3)

$$= -\frac{1}{40}(4x^2+3)^{-5} + C. \leftarrow \text{otra sustitución}$$

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\int (2x - 5)^{11}\, dx$.

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 2 Uso de (8)

Evalúe $\int (2x - 5)^{11}\, dx$.

Solución Si $u = 2x - 5$, entonces $du = 2\,dx$. La integral se ajusta al multiplicar y dividir entre 2 para obtener la forma correcta de la diferencial du:

$$\int (2x-5)^{11}\,dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{(2x-5)^{11}}^{u^{11}}\overbrace{(2\,dx)}^{du} \quad \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{11}du \quad \leftarrow \text{ahora use (8)}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{12}}{12} + C$$

$$= \frac{1}{24}(2x-5)^{12} + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución}$$

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$.

$$\int u^n \, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

EJEMPLO 3 Uso de (8)

Evalúe $\int \cos^4 x \operatorname{sen} x \, dx$.

Solución Para recalcar, volvemos a escribir el integrando como $\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx$. Una vez que se hace la identificación $u = \cos x$, se obtiene $du = -\operatorname{sen} x \, dx$. Al despejar el producto sen x dx de la última diferencial obtenemos sen $x \, dx = -du$. Luego,

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$\int (\cos x)^4 \operatorname{sen} x\, dx = \int \overbrace{(\cos x)^4}^{u^4} \overbrace{(\operatorname{sen} x\, dx)}^{-du} \leftarrow \text{sustitución}$$

$$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

$$-\int u^4\, du \qquad \leftarrow \text{ahora use (8)}$$

$$= -\frac{u^5}{5} + C$$

Reemplazando el valor de u= cos x

$$= -\frac{1}{5}\cos^5 x + C. \qquad \leftarrow \text{otra sustitución}$$

Integrales indefinidas de funciones trigonométricas

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C, \tag{11}$$

$$\int \operatorname{sen} u \, du = -\cos u + C. \tag{12}$$

EJEMPLO 4 Uso de (11)

Evalúe $\int \cos 2x \, dx$.

$$\int \cos u \, du = \operatorname{sen} u + C,$$

Solución Si $u = 2x$, entonces $du = 2\,dx$ y $dx = \frac{1}{2}\,du$. En consecuencia, escribimos

$$\int \cos 2x\,dx = \int \cos \overbrace{2x}^{u}\,\overbrace{(dx)}^{\frac{1}{2}du} \quad \leftarrow \text{sustitución}$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos u\,du \quad \leftarrow \text{ahora use (11)}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} u + C$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C. \quad \leftarrow \text{otra sustitución}$$

EJEMPLO 5 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \sec^2(1 - 4x)\, dx$.

$$\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$$

Solución Reconocemos que la integral indefinida tiene la forma de la fórmula de integración 6 en la tabla 5.2.1. Si $u = 1 - 4x$, entonces $du = -4\,dx$. Ajustar el integrando para obtener la forma correcta de la diferencial requiere multiplicar y dividir entre -4:

$$\begin{aligned}
\int \sec^2(1-4x)\,dx &= -\frac{1}{4}\int \sec^2(\overbrace{1-4x}^{u})(\overbrace{-4\,dx}^{du}) \\
&= -\frac{1}{4}\int \sec^2 u\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 6 en la tabla 5.2.1} \\
&= -\frac{1}{4}\tan u + C \\
&= -\frac{1}{4}\tan(1-4x) + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{x^2}{x^3 + 5}\, dx.$

1

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C$$

Solución Si $u = x^3 + 5$, entonces $du = 3x^2\,dx$ y $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,du$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x^3+5}\,dx &= \int \frac{1}{x^3+5}\,(x^2\,dx)\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{3}\ln|u| + C \qquad \leftarrow \text{fórmula 3 en la tabla 5.2.1}\\ &= \frac{1}{3}\ln|x^3+5| + C.\end{aligned}$$

e^{2x}

EJEMPLO 7 Vuelta a escribir y uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx.$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$$

Solución La integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas de integración en la tabla 5.2.1. No obstante, si el numerador y el denominador se multiplican por e^{2x}, obtenemos

$$\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\,dx.$$

Si $u = e^{2x} + 1$, entonces $du = 2e^{2x}\,dx$, de modo que por la fórmula 3 de la tabla 5.2.1,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{-2x}}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{e^{2x}+1}(2e^{2x}\,dx)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du\\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1) + C.\end{aligned}$$

$\frac{4}{x}$

EJEMPLO 9 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx.$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

Solución Si hacemos $u = 4/x$, entonces $du = (-4/x^2)\,dx$ y $(1/x^2)\,dx = -\frac{1}{4}\,du$.

De nuevo a partir de la fórmula 14 de la tabla 5.2.1 observamos que

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{4/x}}{x^2}\,dx &= \int e^{4/x}\left(\frac{1}{x^2}\,dx\right)\\ &= \int e^{u}\left(-\frac{1}{4}\,du\right)\\ &= -\frac{1}{4}\int e^{u}\,du\\ &= -\frac{1}{4}e^{u} + C\\ &= -\frac{1}{4}e^{4/x} + C.\end{aligned}$$

$u = \frac{4}{x}$ du=-4$x^2 dx$

EJEMPLO 10 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\displaystyle\int \frac{(\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx.$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1.$$

Solución Como en el ejemplo 7, a primera vista la integral dada no se ve como ninguna de las fórmulas en la tabla 5.2.1. Pero si la sustitución u se intenta con $u = \tan^{-1} x$ y $du = \dfrac{1}{1 + x^2}\,dx$, entonces

$$\begin{aligned}
\int \frac{(\tan^{-1} x)^2}{1 + x^2}\,dx &= \int \overbrace{(\tan^{-1} x)}^{u}{}^2 \overbrace{\frac{1}{1 + x^2}\,dx}^{du} \\
&= \int u^2\,du \quad \leftarrow \text{fórmula 2 en la tabla 5.2.1} \\
&= \frac{u^3}{3} + C \\
&= \frac{1}{3}(\tan^{-1} x)^3 + C.
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11 Uso de la tabla 5.2.1

Evalúe $\int \frac{1}{\sqrt{100 - x^2}}\,dx.$

$$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \operatorname{sen}^{-1}x + C$$

$$\int \frac{\frac{1dx}{10}}{\frac{1}{10}\sqrt{100-x^2}} = \int \frac{\frac{1dx}{10}}{\sqrt{\frac{1}{100}(100-x^2)}}$$

$$\int \frac{\frac{1dx}{10}}{\sqrt{\frac{100}{100}-\frac{x^2}{100})}} = \int \frac{\frac{1dx}{10}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{100})}} = \int \frac{\frac{1dx}{10}}{\sqrt{1-(\frac{x}{10})^2}}$$

$u=\frac{x}{10}$ $\qquad du = \frac{dx,}{10}$

$$\int \frac{1\ du}{\sqrt{1-u^2}} = sen^{-1}\, u + C$$

$$= sen^{-1}\ (\frac{x}{10}) + C$$

Identidades útiles Cuando se trabaja con funciones trigonométricas, a menudo es necesario usar una identidad trigonométrica para resolver un problema. Las fórmulas de la mitad de un ángulo para el coseno y el seno en la forma

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \tag{25}$$

son particularmente útiles en problemas que requieren antiderivadas de $\cos^2 x$ y $\operatorname{sen}^2 x$.

EJEMPLO 12 Uso de la fórmula de la mitad de un ángulo

Evalúe $\int \cos^2 x\, dx$.

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2\, du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

Si $u = \cos^2 x \quad du = 2\cos x * (-\operatorname{sen} x)dx$

No serviría de nada, pues no tenemos $-\operatorname{sen} x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Solución Es necesario comprobar que la integral *no* es de la forma $\int u^2\,du$. Luego, al usar la fórmula de la mitad de un ángulo $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, obtenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x(2\,dx)\right] \leftarrow \text{vea el ejemplo 4} \\ &= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right] + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + C.\end{aligned}$$